# الفصل الثاني

# دارات التيار المستمر

# Direct Current Circuits

## 2-1- الظواهر الفيزيائية في الدارات الكهربائية والمقادير الكهربائية الأساسية:

### 2-1-1- كمية الكهرباء Quantity of Electricity:

إن مجموع حاملات الشحنة الكهربائية (المكونة عادة من مليارات الإلكترونات) تعطي كمية كهرباء محددة تدل على كمية الشحنة الكهربائية الإجمالية Q.

فعندما تكون الدارة مفتوحة أي عند عدم مرور تيار كهربائي فأن الشحنات الكهربائية الموجودة في الناقل تكون بحالة حركة عشوائية لا يظهر لها أي أثر وعند إغلاق الدارة تمر حاملات الشحنة (الإلكترونات) عبر أسلاك التوصيل. فإذا كان لدينا جزء من سلك توصيل سطح مقطعه s وطوله $l$ فأن كمية الكهرباء الموجودة في هذا الناقل والتي تمر من المنبع إلى الحمل تساوي:

$$Q = S \cdot l \cdot n.q_e \qquad (2\text{-}1)$$

حيث: n–عدد الإلكترونات الحرة الموجودة في واحدة الحجم من هذا الناقل.

$q_e$ – شحنة الإلكترون الواحد وتساوي $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ .

تقدر كمية الكهرباء بالكولون (C) وهو يساوي:

$$1C = 6.24 \cdot 10^{18} q_e \qquad (2\text{-}2)$$

### 2-1-2- الظواهر الفيزيائية في الدارات الكهربائية:

بتأثير القوى غير الكهرومغناطيسية (كيميائية، ميكانيكية، حرارية، ذرية) ، والتي تشكل مصدر الطاقة ينشأ مجال كهربائي محرض يقوم بتجميع الشحنات الموجبة على القطب الموجب للمنبع والشحنات السالبة على القطب السالب للمنبع. وعند وصل الحمل (انظر الشكل 1-4) ينشا مجال كهربائي أخر يتجه من القطب الموجب إلى القطب السالب تتحرك بتأثيره الإلكترونات من جهة القطب السالب إلى القطب الموجب.

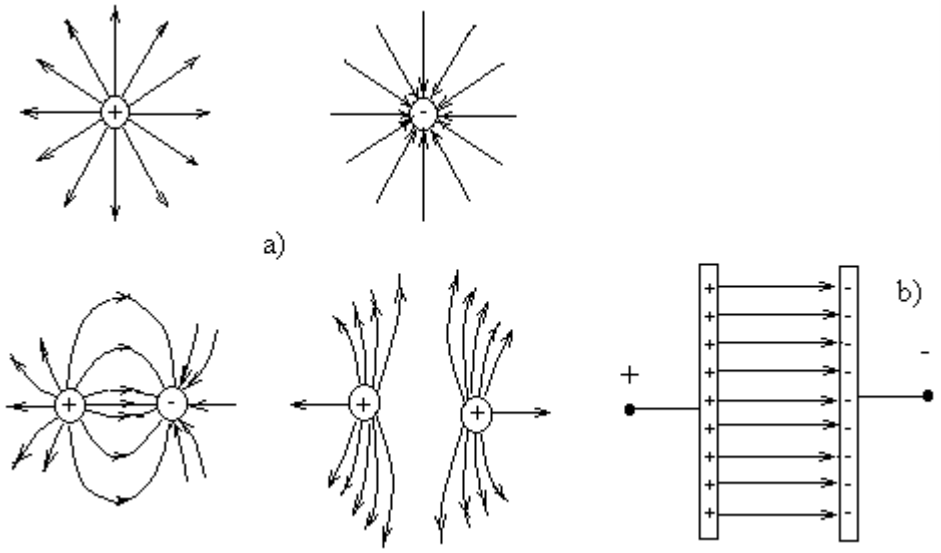
أي تحصل عملية فصل للشحنات داخل المنبع وتحصل عملية إعادة اتحاده هذه الشحنات (تعادل كهربائي) عن طريق دارة الحمل الخارجية.

### 2-1-3- المجال الكهربائي (الحقل الكهربائي) Electrical Field:

إن مرور تيار في ناقل كهربائي يعني بأن هذا الناقل يقع ضمن مجال كهربائي. فالمجال الكهربائي يظهر حول أي جزيء مشحون ويعبر عن حالة مميزة للمادة. كما ينشأ المجال الكهربائي بين أي نقطتين من نقاط الدارة التي يمر بها تيار، فعلى سبيل المثال بين طرفي الحمل أو طرفي منبع الطاقة الكهربائية.

يحتوي المجال الكهربائي على طاقة كهربائية مختزنة تظهر على شكل قوة كهربائية تؤثر على الأجسام المشحونة التي تقع ضمنها.

من غير الممكن رؤية المجال الكهربائي بشكل مباشر ويتم التعبير عنه على شكل خطوط قوى تبين اتجاه تأثير القوى الكهربائية للمجال الكهربائي. وقد أتفق على توجيه خطوط القوى باتجاه حركة الشحنة الموجبة فيما لو وقعت ضمن هذا المجال.

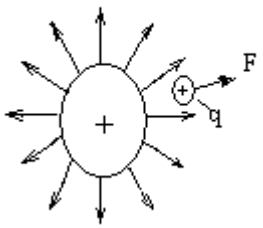



**الشكل 2-1.**

يبين الشكل 2-1-a بأن خطوط القوى تخرج مبتعدة عن الأجسام ذوات الشحنة الموجبة وتتجه متقاربة نحو الأجسام ذوات الشحنة السالبة. وتكون متوازية (الشكل 2-1-b) ضمن صفيحتين مشحونتين بشكل متجانس.

يتم التعبير عن المجال الكهربائي بشدته.

شدة المجال الكهربائي: يؤثر المجال الكهربائي على الشحنة Q التي تقع ضمنه (انظر الشكل 2-2) بقوة F تتعلق قيمتها بمقدار الشحنة وبشدة المجال الكهربائي. وبالتالي فشدة المجال الكهربائي تتعلق بمقدار القوة التي تجذب أو تنفر (تبعد) واحدة الشحنة.




**الشكل 2-2**

شدة المجال الكهربائي $\varepsilon$ – هو قيمة شعاعية، تحدد نسبة القوة F التي يؤثر فيها المجال الكهربائي على جزيء مشحون إلى قيمة شحنة هذا الجزيء (أي قوة تأثير الحقل الكهربائي على الشحنات الكهربائية Q). ويعبر عنها رياضياً بالعلاقة التالية:

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{Q \to 0} \frac{\overline{F}}{Q} \qquad (2\text{-}3)$$

إذا طبق توتر U على طرفي صفيحتين تفصل بينهما مسافة d تكون شدة المجال الكهربائي الساكن تساوي:

$$\varepsilon = \frac{U}{d} \qquad (2\text{-}4)$$

تقاس شدة المجال الكهربائي بواحدة [V/m] أو[V/cm].

عند يحرك المجال الكهربائي شحنة Q لمسافة L فأنه ينجز عملاً مقداره:

$$A = Fd = Q\varepsilon d = QU \qquad (2\text{-}5)$$

### 2-1-4- شدة التيار الكهربائي Electrical Current Strength:

التيار الكهربائي– هو ظاهرة الحركة الموجهة لحاملات الشحنة الحرة (الإلكترونيات في المعادن والأيونات في السوائل الناقلة).

إن شدة التيار الكهربائي هي معدل تغير كمية الكهرباء $\Delta Q$ المارة عبر ناقل سطح مقطعه S خلال فترة زمنية تسعى للصفر $\Delta t$:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \qquad (2\text{-}6)$$

عندما يكون التيار مستمر تمر نفس كمية الكهرباء $\Delta Q$ خلال كل فترة زمنية $\Delta t$. لذلك يكون:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{[C]}{[s]} = [A] \qquad (2\text{-}7)$$

أي أن شدة التيار الكهربائي في هذه الحالة– هي كمية الكهرباء Q التي تمر عبر سطح مقطع ناقل S خلال واحدة الزمن.

يقاس التيار بالأمبير Ampere [A] وهو يكافئ كولون لكل ثانية.

لقد تمت تسمية الأقطاب موجب وسالب في وقت لم تكن فيه النظرية الإلكترونية عن تركيب الذرة معروفة. واصطلح العلماء بأن اتجاه التيار الكهربائي في الدارة الخارجية يكون من القطب الموجب إلى القطب السالب ويتجه في داخل المنبع من القطب السالب إلى الموجب كما يبين السهم في الشكل b-4-1، وقد بقيت هذه الاصطلاحات معتمدة رغم أن اتجاه حركة الإلكترونات تكون بعكس اتجاه حركة التيار الكهربائي.

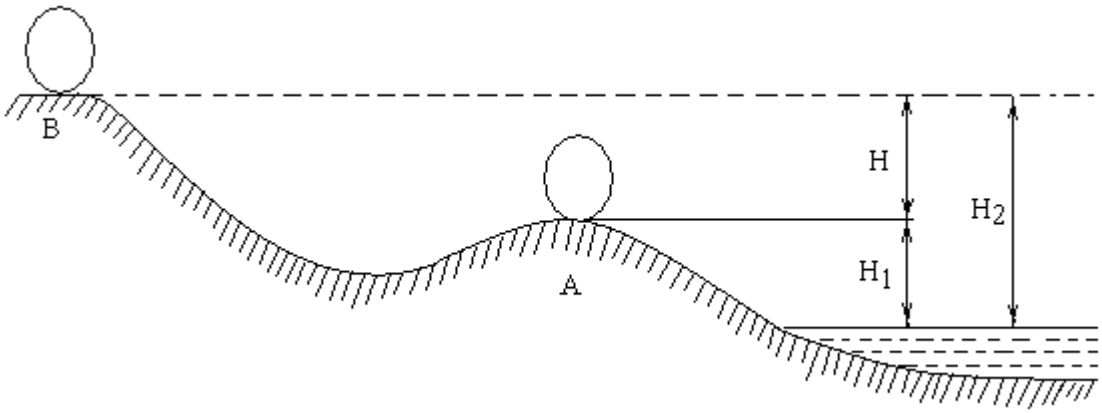
يكون اتجاه التيار الكهربائي من النقطة ذات الجهد الأعلى إلى النقطة ذات الجهد الأقل. وإذا تعذر تحديد اتجاه التيار في فرع من فروع الدارة الكهربائية يتم اختيار اتجاه افتراضي (ويُرسم سهم) وإذا حصلنا بنتيجة الحسابات إشارة (–) يكون الاتجاه الحقيقي للتيار بعكس الاتجاه المفترض.

### 2-1-5-فرق الكمون Potential Difference:

من أجل وصف الطاقة المختزنة في كل نقطة من نقاط المجال الكهربائي تم إدخال مفهوم الكمون الكهربائي $V$.

فالكمون الكهربائي لنقطة معينة من نقاط المجال يساوي للعمل الذي تنجزه قوة المجال الكهربائي لتحريك واحدة الشحنة الموجبة من هذه النقطة إلى خارج المجال.

أما فرق الكمون بين نقطتين $V_1$ و $V_2$ من نقاط المجال فتساوي للعمل الذي تصرفه قوة المجال الكهربائي من أجل تحريك واحدة الشحنة من النقطة ذات الكمون المرتفع إلى النقطة ذات الكمون الأقل.




**الشكل 2-3**

إن مفهوم الكمون الكهربائي يشبه مفهوم مستوى ارتفاع سطح الأرض. فلرفع كرة إلى المستوى B (الشكل 2-3) تحتاج لبذل عمل أكبر من رفعها إلى المستوى A. وبالتالي فأن الكرة المرفوعة إلى المستوى $H_2$ تُنجز عمل أثناء هبوطها أكبر من العمل الذي تنجزه عند هبوطها من المستوى $H_1$ فقط.

يتم قياس الارتفاع بالنسبة لسطح البحر، الذي يعتبر نقطة الصفر. أما الكمون الصفري فهو كمون الأرض.

### 2-1-6-التوتر (الجهد) الكهربائي Voltage:

في العلوم الكهربائية لا يهمنا عادة كمون نقطة واحدة فقط، بل فرق الكمون بين نقطتين من نقاط المجال الكهربائي، لأن العمل المصروف من أجل تحريك شحنة Q من نقطة لأخرى يتعلق بمقدار فرق الكمون.

في الدارات الكهربائية تطلق تسمية التوتر أو الجهد U على فرق الكمون بين نقطتين من نقاط الدارة الكهربائية.

فالتوتر– هو نسبة العمل A المصروف من قبل مجال كهربائي شدته $\varepsilon$ من أجل نقل واحدة الشحنة (1C) من نقطة إلى أخرى (المسافة L) إلى قيمة هذه الشحنة.

$$U = V_1 - V_2 = \frac{A}{Q} \qquad (2\text{-}8)$$

أو التوتر –هو قيمة عددية تساوي التكامل الخطي لشدة المجال الكهربائي:

$$U = \int_l \varepsilon dl \qquad (2\text{-}9)$$

واحدة التوتر الكهربائي هي الفولت [V].

### 2-1-7- القوة المحركة الكهربائية Electromotive Force:

تعبر القوة المحركة الكهربائية (ق.م.ك.) عن مدى مقدرة المجال الكهربائي المحرض على إنشاء تيار كهربائي. وعددياً تساوي إلى العمل A الذي ينجزه هذا المجال عندما ينقل شحنة Q مقدارها واحد كولون. أي:

$$E = \frac{A}{Q} = \frac{[J]}{[C]} = [V] \qquad (2\text{-}10)$$

### 2-1-8-كثافة التيار الكهربائي Electrical Current Density:

تعرف كثافة التيار الكهربائي J في ناقل سطح مقطعه S بأنها شدة التيار في واحدة سطح المقطع:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{[A]}{[mm^2]} \qquad (2\text{-}11)$$

### 2-1-9-المقاومة الكهربائية Electrical resistance:

إن التصادم الحاصل بين الإلكترونات المتحركة وذرات مادة الناقل يؤدي إلى إعاقة حركة الإلكترونات. وللتغلب على هذه الإعاقة تُصرف طاقة كهربائية تتحول إلى حرارة. تسمى إعاقة الناقل لحركة حاملات الشحنة (التيار) بالمقاومة (الممانعة) الكهربائية R أو (Z) إن مقاومة الدارة الخارجية (خارج المنبع) تساوي نسبة التوتر إلى التيار الذي يمر فيها:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{[V]}{[A]} = [\Omega] \qquad (2\text{-}12)$$

تُقاس المقاومة الكهربائية بالأوم–وهو مقاومة ناقل إذا طبق بين طرفيه توتر مقداره واحد فولت أدى لمرور تيار مقداره واحد أمبير خلاله.

تبين تجريبياً بأن المقاومة الكهربائية لأي ناقل تتناسب طرداً مع طوله وعكساً مع سطح مقطعه:

$$R = \rho \frac{l}{S} \qquad (2\text{-}13)$$

حيث: $l$–طول السلك الناقل بالمتر m.

S– مساحة سطح مقطع السلك بالميليمتر مربع $mm^2$.

$\rho$ – المقاومة النوعية، $\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$. وهي تتعلق بنوع المادة المصنوع منها الناقل (انظر الجدول 2-1).

تتعلق المقاومة الكهربائية بدرجة حرارة الوسط الخارجي:

$$R = R_o(1 + \alpha \cdot \Delta t) \qquad (2\text{-}14)$$

وباعتبار أن درجة حرارة الجو الوسطية هي $20C^\circ$ فتكون $R_o = R_{20}$ وتصبح العلاقة الأخيرة على الشكل التالي:

$$R = R_{20}[1 + \alpha(t_2 - 20)] \qquad (2\text{-}15)$$

حيث: $R_{20}$ –المقاومة عند درجة الحرارة $20C^\circ$.

$\alpha$ –المعامل الحراري، ويتعلق بنوع المادة (انظر الجدول 2-1)، واحدة قياس المعامل الحراري هي:

$\alpha = [\frac{1}{C^o}]$.

$t_2$ –درجة حرارة الوسط المحيط $C^\circ$.

يوجد مقدار كهربائي أخر هو الناقلية الكهربائية Electrical Conductance –وهي قيمة تساوي لعكس المقاومة الكهربائية وتقاس بالسيمنس (وهو عكس الأوم) $[S = \frac{1}{\Omega}]$ .

$$G = \frac{1}{R} = \frac{S}{\rho l} = \frac{\gamma S}{l}[S] \qquad (2\text{-}16)$$

حيث: $\gamma = \frac{1}{\rho}[\frac{m}{\Omega \cdot mm^2}]$ – الناقلية النوعية Conductivity وتتعلق بنوع المادة المصنوعة منها المقاومة (انظر الجدول 2-1).

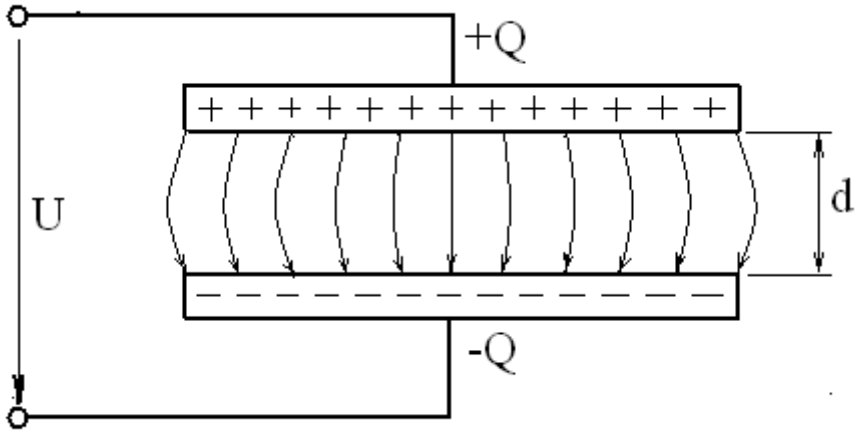
يبين الجدول 2-1 المقاومة النوعية والناقلية النوعية والمعامل الحراري لأهم المواد المستخدمة في مجال الهندسة الكهربائية عند درجة حرارة $20C^\circ$ .

**الجدول 2-1**.

| الرقم | المادة | $\rho[\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}]$ | $\gamma[\frac{m}{\Omega \cdot mm^2}]$ | $\alpha[\frac{1}{C^o}].10^{-3}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | فضة | 0.016 | 62.6 | 3.8 |
| 2 | نحاس | 0.0179 | 56 | 3.93 |
| 3 | ذهب | 0.023 | 44 | 4 |
| 4 | ألمنيوم | 0.028 | 35 | 3.77 |
| 5 | نيكل | 0.08 | 13 | 3.7 |
| 6 | منغنيز | 0.045 | 22 | 3.9 |
| 7 | زنك | 0.063 | 16 | 3.7 |
| 8 | حديد | 0.15 | 7 | 6 |
| 9 | توتيا | 0.11 | 9.1 | 4.2 |
| 10 | رصاص | 0.21 | 4.8 | 4.2 |
| 11 | زئبق | 0.96 | 1.04 | 0.9 |
| 12 | برونز | 0.056 | 18 | – |
| 13 | منغنين | 0.43 | 2.3 | 0.11 |
| 14 | كونستانتان | 0.5 | 2 | 0.0035 |
| 15 | فحم | 60-80 | 0.0017 | 0.4 |
| 16 | زجاج | $1\cdot10^{12}$ | $1\cdot10^{-12}$ | – |
| 17 | ميكا | $1\cdot10^{15}$ | $1\cdot10^{-15}$ | – |
| 18 | كوارتز | $75\cdot10^{14}$ | $75\cdot10^{-14}$ | – |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 19 | بكاليت | $5\cdot10^{12}$ | $5\cdot10^{-12}$ | – |
| 20 | خشب | $1\cdot10^{13}$ | $1\cdot10^{-13}$ | – |

### 2-1-10- المكثف الكهربائي Electrical condenser (capacitor):




**الشكل 2-3**

المكثف الكهربائي هو عبارة عن ناقلين مفصولين عن بعضهما بواسطة مادة عازلة يمكن أن تكون الهواء أو أية مادة عازلة أخرى ذات ثابت عازلية $\xi_r$، يستخدم لتخزين الطاقة الكهربائية على شكل حقل كهربائي ساكن يتشكل بين ناقليه، حيث أن أحد الناقلين يتم وصله مع القطب الموجب للمنبع والناقل الآخر مع القطب السالب فتتجمع الشحنات الموجبة على اللبوس الأول والسالبة على اللبوس الآخر (الشحنات السالبة $-Q$ تساوي الشحنات الموجبة $+Q$)، وعند فصل التغذية تبقى الطاقة مختزنة في المكثف ويمكن تفريغها بحمل ما.

عند زيادة التوتر أو القوة المحركة الكهربائية المطبقة على المكثف تزداد شدة الحقل الكهربائي المتشكل بين اللبوسين (الشكل 2-3):

$$\varepsilon = \frac{U}{d}$$

وبالتالي سوف تزداد قيمة التحريض الكهربائي:

$$D = \frac{Q}{S} = \xi\varepsilon$$

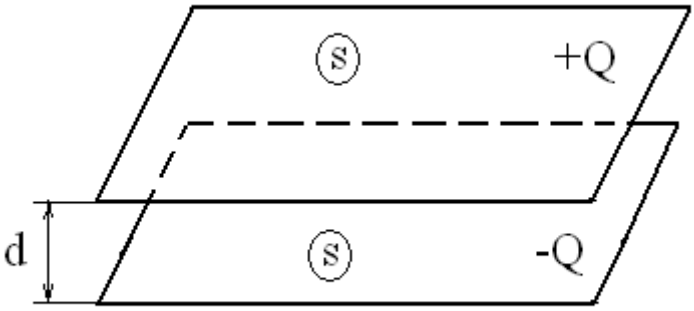
أي أن الشحنات الكهربائية تزداد مع زيادة التوتر وتنقص بنقصانه:

$$Q = CU$$

ويسمى عامل تناسب كمية الشحنة الكهربائية مع التوتر –سعة المكثف الكهربائي $C$.

هناك عدة أنواع للمكثف ويعتبر المكثف المستوي هو الأكثر انتشاراً.

**2-1-11- المكثف المستوي وحساب سعته:**




يتألف هذا المكثف من لبوسين معدنيين متوازيين مساحة كل منهما $S$ والمسافة الفاصلة بينهما d وكل لبوس مشحون بشحنة Q متعاكستين بالإشارة. يمكن حساب سعة المكثف المستوي كما يأتي:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{DS}{d\varepsilon} = \frac{\xi_o \xi_r \varepsilon S}{d\varepsilon} = \xi_o \xi_r \frac{S}{d}$$

حيث $\xi_o = 8.8 \cdot 10^{-12} [\frac{F}{m}]$ –ثابت العازلية الكهربائية في الخلاء.

$\xi_r$ – ثابت العازلية الكهربائية للمواد الأخرى.

ويبين الجدول 2-2 مضاعفات وأجزاء واحدات القياس .

**الجدول 2-2.**

s

**تدريبات:**

مثال 2-1: تُشحن مدخرة كهربائية بتيار شدته 3A. فما هي كمية الكهرباء التي تُنقل إلى المدخرة بعد زمن قدره 8 ساعات.

الحل: من العلاقة (2-7) لدينا:

$$Q = I \cdot t = 3 \cdot 8 = 24Ah$$
$$= 3 \cdot 8 \cdot 60 \cdot 60 = 3 \cdot 8 \cdot 3600 = 86400[C]$$

مثال 2-2: إذا كان سطح مقطع ناقل يساوي $20mm^2$ وطوله 1000m والمطلوب:

أ-ما هي قيمة مقاومته إذا كان مصنوع من الألمنيوم، مع العلم أن المقاومة النوعية للألمنيوم $0.028\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$.

ب-ماهي قيمة مقاومته إذا كان مصنوع من النحاس، مع العلم بأن الناقلية النوعية للنحاس تساوي $56\frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$.

الحل:

أ-من العلاقة (2-13) لدينا:

$$R = \rho\frac{l}{S} = 0.028\frac{1000}{20} = 1.4\Omega$$

ب- من العلاقة (2-16) لدينا:

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S} = \frac{1000}{56 \cdot 20} = 0.89\Omega$$

مثال 2-3:

موصل من النحاس له مقطع دائري قطره 1mm وطول الموصل 50m. والمطلوب:

أ-أحسب قيمة مقاومته عند درجة الحرارة $20C^\circ$.

ب- كم تصبح قيمة مقاومة هذا الموصل عند درجة الحرارة $100C^\circ$ مع العلم بأن المعامل الحراري للنحاس $\alpha = 3.93.10^{-3}[\frac{1}{C^o}]$ .

الحل:

أ-نحسب سطح مقطع الموصل:

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0.5)^2 = 0.785[mm^2]$$

-نحسب قيمة المقاومة عند درجة الحرارة $20C^\circ$:

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S} = \frac{50}{56 \cdot 0.785} = 1.137\Omega$$

عند درجة الحرارة $100C^o$ تصبح قيمة المقاومة من العلاقة (2-15):

$$R = R_{20}[1+\alpha(t_2 - 20)] = 1.137[1+3.93\cdot 10^{-3}(100-20)] = 1.5\Omega$$

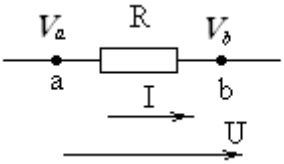
مثال 2-4:

حدد مقدار التوتر واتجاه التيار والتوتر للمقاومة المبينة في الشكل 2-4 للحالات التالية:

أ- $V_b = 10V, V_a = 0V$.

ب- $V_b = 11V, V_a = 10V$.

ج- $_a = 0V$ و $V_b = -1V$.




**الشكل 2-4**

الحل:

$U = V_a - V_b$ ويتجه التيار والتوتر من النقطة ذات الكمون الأعلى إلى النقطة ذات الكمون الأقل.

ففي الحالة أ $U = V_a - V_b = -10$ والاتجاه من النقطة b إلى النقطة a.

وفي الحالة ب $U = V_a - V_b = -1$ والاتجاه من b إلى a.

وفي الحالة ج $U = V_a - V_b = 1$ والاتجاه من a إلى b.

مثال 2-5:

اجري العمليات الحسابية التالية منتبهاً للتحويل بين الواحدة ومضاعفاتها وأجزائها:

أ- $100mA \cdot 5k\Omega$ ب- $\frac{1kV}{100mA}$ ج- $1mA - 100\mu A$ د- $10M\Omega \cdot 10\mu A$

## 2-2- القوانين الأساسية لدارات التيار المستمر الكهربائية:

### 2-2-1- قانون أوم Ohm's Law:

يُحدد قانون أوم العلاقة بين المقادير الكهربائية الأساسية في أجزاء وفروع الدارة الكهربائية وينص على مايلي: يزداد التيار الكهربائي بازدياد التوتر وينقص بازدياد المقاومة.

فلكل جزء من أجزاء الدارة الكهربائية-عدا المنابع-أي للأجزاء غير الفعالة من الدارة (انظر الشكل 2-4) يتحقق قانون أوم:

$$I = \frac{U}{R} \qquad (2\text{-}17)$$

و منها:

$$R = \frac{U}{I}$$

$$U = R \cdot I$$

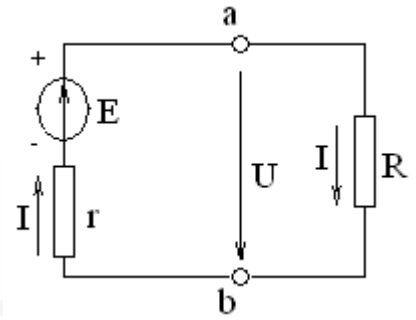
يسمى أيضاً التوتر على الجزء غير الفعال من الدارة بهبوط التوتر.

مثال 2-6:

ما مقدار التيار الذي يمر في مقاومة $100\Omega$ عندما يطبق على طرفيها توتر قدره 24V.

الحل: $$I = \frac{V}{R} = \frac{24}{100} = 0.24A$$

**2-2-2- قانون أوم في الدارات المغلقة ذات المقاومة الداخلية للمنبع:**




**الشكل 2-5**

عند وصل منبع الطاقة الكهربائية مع الحمل (الشكل 2-5) يتحول جزء من الطاقة الكهربائية داخل المنبع إلى طاقة حرارية. هذا يعني وجود مقاومة داخلية r في منبع الطاقة بالإضافة للقوة المحركة الكهربائية ق.م.ك. E. فحسب قانون أوم لهذه الدارة يكون:

$$\begin{aligned} E &= U + r \cdot I = U + \Delta U \\ &= I \cdot R + r \cdot I \end{aligned} \qquad (2\text{-}18)$$

أي أن ق.م.ك. تكون دائما أكبر من التوتر على طرفي الحمل بمقدار $r \cdot I$ الذي يسمى هبوط التوتر $\Delta U$ في المقاومة الداخلية للمنبع. ويسمى المنبع الذي يكون هبوط التوتر $r \cdot I$ فيه مهملاً بالمقارنة مع التوتر على طرفي الحمل U (أو E ) بالمنبع المثالي. ففي الشكل 1-6 بين النقطتين a وf موصل منبع مثالي.

مثال 2-7:

للدارة المبينة في الشكل 2-5 أحسب قيمة التوتر على طرفي الحمل $R = 11\Omega$ وهبوط التوتر على طرفي المقاومة الداخلية للمنبع $r = 1\Omega$ إذا كانت ق.م.ك للمنبع تساوي E=12V.

الحل:

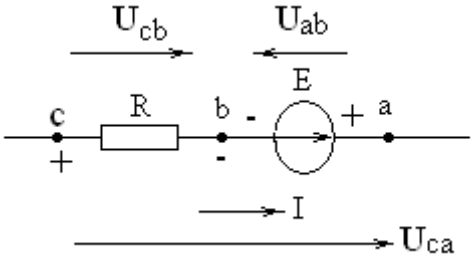
$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{12}{11 + 1} = 1A$$

$$U = I \cdot R = 1 \cdot 11 = 11V$$

$$\Delta U = I \cdot r = 1 \cdot 1 = 1V$$

**2-2-3- قانون أوم العام:**

يمكن كتابة قانون أوم لأجزاء الدارة، التي تحتوي على منبع ق.م.ك. أي للأجزاء الفعالة (انظر الشكل 2-6).




**الشكل 2-6**

تم اختيار الاتجاه الموجب للتوتر $U_{cb} = V_c - V_b$ على طرفي المقاومة R بحيث يتطابق مع الاتجاه الموجب التيار I (من الجهة ذات الجهد الأعلى إلى الجهة ذات الجهد الأقل)، ويتم اختيار الاتجاه الموجب للتوتر على طرفي المنبع $U_{ab}$ من جهة القطب الموجب إلى السالب.

من الشكل 2-6 نلاحظ بأن:

$$U_{ca} = U_{cb} - U_{ab}$$

وحسب قانون أوم فأن $U_{cb} = RI$ و $U_{ab} = E$، فيكون:

$$U_{ca} = RI - E$$

$$I = \frac{U_{ca} + E}{R} \qquad (2\text{-}19)$$

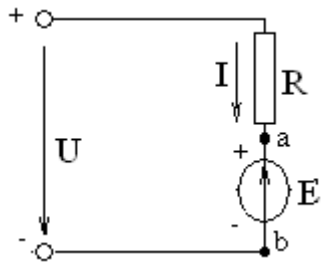
إن العلاقة (2-19) هي قانون أوم العام.

وإذا كان اتجاه ق.م.ك. E بعكس اتجاه التيار تصبح العلاقة (2-19) على الشكل التالي:

$$I = \frac{U_{ca} - E}{R} \qquad (2\text{-}20)$$

مثال 2-8:

للدارة المبينة في الشكل 2-7 حدد قيمة التيار I إذا كانت $E = 100V, R = 50\Omega, U = 220V$ .




**الشكل 2-7**

الحل:

$$U = IR + U_{ab}$$
$$U_{ab} = E$$
$$\Rightarrow I = \frac{U - E}{R} = \frac{220 - 100}{50} = 2{,}4A$$

### 2-2-4-قوانين كيرشوف Kirchhoff's Laws:

قام كيرشوف بصياغة قانونيه عام 1945،كما ذكرنا سابقاً، ومنذ ذلك الحين أصبح هذين القانونين والطرق التي استُنتجت على اساسهما تستخدم لحساب وتحليل عمل الدارات الكهربائية.

**قانون كيرشوف الأول Kirchhoff's Current Law:**

ينص قانون كيرشوف الأول على أن المجموع الجبري للتيارات الكهربائية المتعلقة بعقدة محددة من دارة كهربائية يساوي الصفر (انظر الشكل 2-8) أي أن:

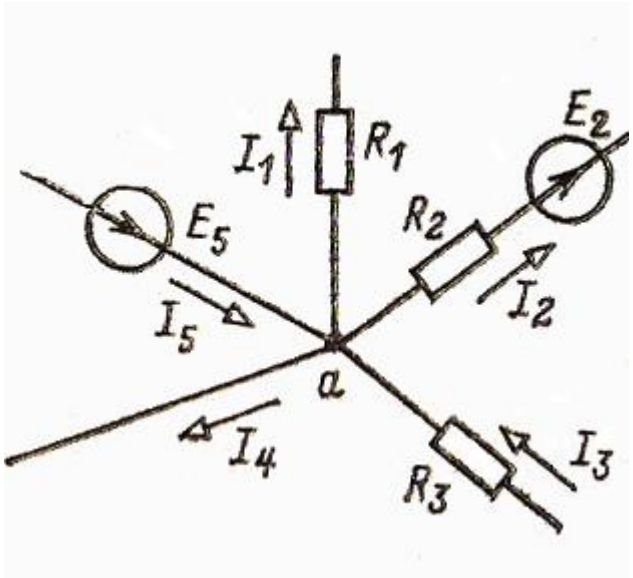
$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \qquad (2\text{-}20)$$

حيث n–عدد فروع العقدة، وk–رقم التيار او الفرع.

يجب اعتبار التيارات الداخلة إلى العقدة موجبة والتيارات الخارجة منها سالبة (أو بالعكس). فمن الشكل 2-8 نجد:

$$I_3 + I_5 - I_1 - I_2 - I_4 = 0$$

من الناحية الفيزيائية فأن قانون كيرشوف الأول يعبر عن مصونية الشحنات الكهربائية وعدم تخزينها في العقدة الكهربائية.




الشكل **2-8**

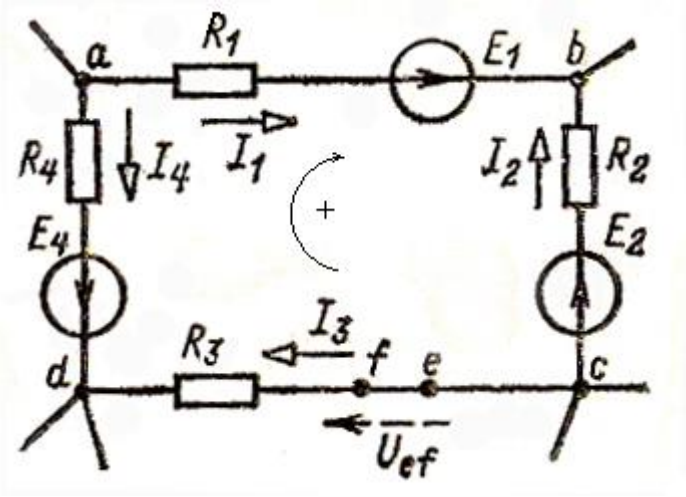
**قانون كيرشوف الثاني Kirchhoff's Voltage Law**:

يستخدم قانون كيرشوف الثاني لحلقات الدارات الكهربائية وينص على أن المجموع الجبري للقوى المحركة الكهربائية في حلقة مغلقة يساوي المجموع الجبري لهبوطات التوتر على عناصر هذه الحلقة:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{k=1}^{m} U_k \qquad (2\text{-}21)$$

حيث n–عدد منابع ق.م.ك في الحلقة.

m–عدد العناصر غير الفعالة (المقاومات) في الحلقة.




الشكل **2-9**

يعتمد قانون كيرشوف الثاني على قانون عدم فناء الطاقة حيث يبقى كمون نقطة ما في الدارة نفسه فيما إذا حسبنا كمون هذه النقطة في بداية الحلقة أونهايتها.

نكتب قانون كيرشوف الثاني للحلقة abcda المبينة في الشكل 2-9:

$$E_1 - E_2 - E_4 = R_1 I_1 - I_2 R_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4$$

في حال عدم وجود تيار بفرع ما من فروع الدارة، فعلى سبيل المثال إذا كانت المقاومة $R_3$ مفصولة وذلك بقطع الناقل ef فيكون التيار $I_3 = 0$ عندئذ يصبح قانون كيرشوف الثاني للحلقة السابقة abcda كما يلي:

$$E_1 - E_2 - E_4 = R_1 I_1 - I_2 R_2 + U_{ef} - R_4 I_4$$

وسنقوم بالتدرب على حل المسائل باستخدام قوانين كيرشوف في فقرات لاحقة.

### 2-2-5- الطاقة والاستطاعة في الدارات الكهربائية

### :Electrical Energey and Electrical Power

من المعروف بأن الطاقات المختلفة يمكن أن تتحول إلى طاقات كهربائية لتشكل المنابع الكهربائية.

ومن تعريف ق.م.ك. نستنتج، بأن العمل لذي يُنجزه منبع الطاقة الكهربائية خلال الزمن t، أو العمل الذي تبذله القوى الخارجية عند فصل الشحنات داخل المنبع يساوي إلى الطاقة الكهربائية للمنبع وتساوي:

$$W = E \cdot Q = E \cdot I \cdot t \qquad (2\text{-}22)$$

في الحمل أو الآخذة تحدث عملية عكسية حيث تتحول الطاقة الكهربائية إلى طاقات أخرى – حرارية، ضوئية أو ميكانيكية.

إن الطاقة (أو العمل) التي يصرفها تيار كهربائي شدته I (في الحمل) خلال الزمن t عند توتر معروف U تساوي:

$$W_L = U \cdot I \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t = \frac{U^2 t}{R} \qquad (2\text{-}23)$$

تعبر الاستطاعة عن شدة تحول الطاقة من شكل لأخر خلال واحدة الزمن (أي الطاقة التي يأخذها أو يعطيها المنبع خلال واحدة الزمن).

إن استطاعة منبع التيار المستمر تساوي:

$$P = \frac{W}{t} = E \cdot I \qquad (2\text{-}24)$$

وللحمل:

$$P_L = \frac{W_L}{t} = U \cdot I = RI^2 = \frac{U^2}{R} \qquad (2\text{-}25)$$

بحسب نظام القياس العالمي SI واحدة قياس الطاقة هي الجول [J] وواحدة قياس الاستطاعة الواط (W) أي أن:

$(1J = 1W \cdot s)$. كما تستخدم في الهندسة الكهربائية مضاعفات وأجزاء الواحدات فعلى سبيل المثال:

$$1\mu W = 10^{-6}W, 1mW = 10^{-3}W, 1MW = 10^{6}W, 1kW = 1000W$$

يعبر عن الطاقة الكهربائية في كثير من الأحيان بالكيلو واط ساعي:

$$1kWh = 3.6 \cdot 10^6 J$$

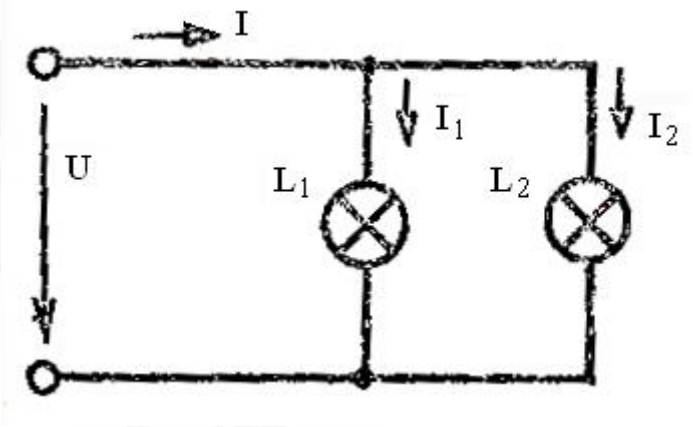
مثال 2-9:

في دارة التيار المستمر المبينة في الشكل 2-10 يُضاء المصباحان لمدة يوم كامل (24h). فإذا كان التوتر U=220V واستطاعة المصباح الأول 120W والثاني 80W المطلوب تحديد:

أ-تيارات الدارة $(I, I_2, I_1)$.

ب- مقاومات المصابيح.

ج-قيمة الطاقة الكهربائية المصروفة إذا كان سعر الكيلواط الساعي الواحد هو ليرتان.




**الشكل 2-10**

الحل:

أ-

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{120}{220} = 0.545A$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U} = \frac{80}{220} = 0.364A$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{P_1 + P_2}{U} = \frac{200}{220} = 0.909A$$

ب-

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{U^2}{P_1} = \frac{(220)^2}{120} = 403.33\Omega$$

$$R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{U^2}{P_2} = \frac{(220)^2}{80} = 605\Omega$$

ج-

الاستطاعة الكلية: $P = P_1 + P_2 = 120 + 80 = 200W$

الطاقة المصروفة خلال يوم: $W_L = P \cdot t = 200 \cdot 24 = 4800Wh = 4.8kWh$

ثمن الطاقة المصروفة: $K = k \cdot W = 2 \cdot 4.8 = 9.6S.P.$

### 2-2-6-قانون جول Joule's Law:

عند مرور التيار في السلك االناقل يسخن السلك نتيجة اصطدام الإلكترونات بالذرات. يحدد قانون جول كمية الحرارة الناتجة عن مرور التيار في الموصل.

فبحسب هذا القانون تتناسب كمية الحرارة $Q_t$ الناتجة في السلك الناقل طرداً مع مربع التيار ومع مقاومة هذا الناقل R ومع زمن مرور التيار فيه.

$$Q_t = RI^2t \quad [J] \qquad (2\text{-}26)$$

بمقارنة العلاقة (2-26) مع العلاقة (2-23) نستنتج بأن كمية الطاقة التي يُطلقها الموصل تساوي لكمية الطاقة التي اكتسبها هذا الموصل اثناء مرور التيار به. تُقاس كمية الحرارة في علم الفيزياء بالحريرة [cal] (الحريرة هي كمية الحرارة، اللازمة لتسخين غراماً واحداً من الماء درجة مئوية واحدة؛ 1J=0.24cal)، فيصبح قانون جول في هذه الحالة على التالي:

$$Q_t = 0.24RI^2t[cal] \qquad (2\text{-}27)$$

مثال 2-10:

للدارة المبينة في الشكل 2-10، احسب كمية الحرارة $Q_t$ التي يطلقها المصباحان بالجول وبالكيلوحريرة.

الحل:

نحسب قيمة المقاومتان $R_2, R_1$ الموصلتان على التفرع:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{403.33 \cdot 605}{403.33 + 605} = 242\Omega$$

$$Q_t = RI^2 t = 242 \cdot (0.909)^2 \cdot 24 \cdot 3600 = 17.28 \cdot 10^6 [J]$$

$$Q_t = 0.24 \cdot R \cdot I^2 \cdot t =$$

$$= 0.24 \cdot 242 \cdot (0.909)^2 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 10^{-3} = 4146.37 [kcal]$$

### 2-2-7-توازن الاستطاعة The Power Balance:

انطلاقاً من قانون مصونية الطاقة، فأن الاستطاعة التي تنتجها منابع الطاقة الكهربائية $\sum EI$ يجب أن تساوي الاستطاعة التي تستهلكها الدارة الكهربائية $\sum RI^2$ والتي تتحول إلى أنواع أخرى من أنواع الطاقة:

$$\sum EI = \sum RI^2 \qquad (2\text{-}28)$$

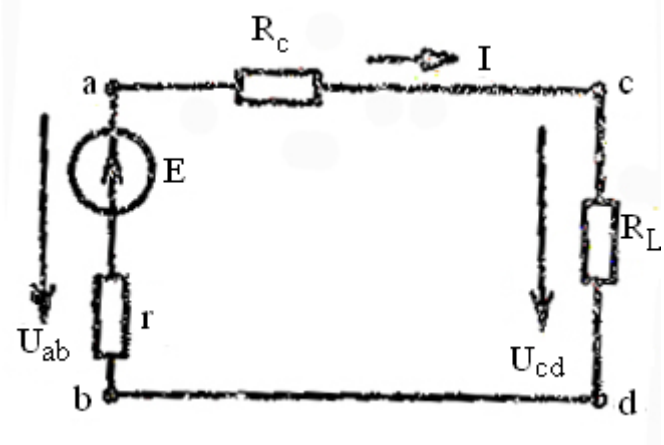
تسمى العلاقة (2-28) بمعادلة توازن الاستطاعة في الدارة الكهربائية.

إذا اخترنا اتجاه التيار بحيث يتفق مع اتجاه ق.م.ك. وحصلنا بنتيجة الحساب على قيمة موجبة للتيار هذا يعني بأن المنبع ينتج طاقة كهربائية ويعمل في نظام التوليد. وإذا حصلنا على قيمة سالبة للتيار فيكون حاصل الضرب $E \cdot I$ سالب وهذا يعني بأن المنبع يعمل كمستهلك للطاقة الكهربائية (فعلى سبيل المثال، المحرك الكهربائي، والمدخرة في حالة الشحن).

### 2-2-8-الضياعات في الطاقة، استطاعة الضياعات والمردود

### : Energey Losses and Efficiency

عندما تتحول الطاقة الكهربائية إلى نوع أخر من أنواع الطاقة (أو بالعكس) يضيع جزء اً منها على سبيل المثال للتغلب على الاحتكاك في اللورمانات أو يضيع جزءاً منها على شكل حرارة في اسلاك النقل، هذه المفاقيد لايستفاد منها ويقوم الباحثون بالعمل على تخفيضها إلى أدنى حد ممكن.




**الشكل 2-11**

في الدارات الكهربائية الحقيقية (انظر الدارة المبينة في الشكل 2-11) يكون للمنبع مقاومة داخلية (انظر الشكل 2-5 أيضاً). وقد توصل بين المنبع والحمل ذي المقاومة $R_L$ عناصر أخرى تأخذ طاقة ولا تعيدها للمنبع. فعلى سبيل المثال قد يقع الحمل على مسافة كبيرة من المنبع وتصل بينهما خطوط نقل ذات مقاومة $R_c$ (انظر الشكل 2-11). لذلك وبحسب قانون كيرشوف الثاني نجد:

$$E = r \cdot I + R_c \cdot I + R_L \cdot I \qquad (2\text{-}29)$$

بضرب طرفي المعادلة بالتيار I نحصل على:

$$E \cdot I = r \cdot I^2 + R_c \cdot I^2 + R_L \cdot I^2 \qquad (2\text{-}30)$$

حيث: $E \cdot I$ – الطاقة التي ينتجها المنبع.

$r \cdot I^2$ و $R_c \cdot I^2$ –استطاعة الضياعات في خطوط النقل وفي المقاومة الداخلية للمنبع.

$P_L = R_L \cdot I^2 = U_{cd} I$ – استطاعة الحمل، أي الاستطاعة المفيدة.

كلما انخفضت مقاومة خطوط النقل والمقاومة الداخلية للمنبع تصغر الضياعات. يمكن تخفيض مقاومة خطوط النقل وذلك بزيادة مساحة مقاطع الأسلاك فيزداد حجم النحاس أو الألمنيوم المطلوب لصناعة الموصلات وهذا لن يكون دائماً مبرراً من الناحية الاقتصادية. الطريقة الثانية لتخفيض الضياعات تتحقق برفع توتر المنبع. وبالفعل فأن زيادة التوتر يخفض التيار، فعند نفس استطاعة الحمل $U_{cd} I$ تنخفض الضياعات $r \cdot I^2$ و $R_c \cdot I^2$ – لدرجة كبيرة– بما يتناسب مع مربع التيار. إلا أن رفع الجهد يتطلب تقوية العازلية، وهذا ممكن إلى حد معين ولكن لن يكون دائماً مبرراً من الناحية الاقتصادية. لذلك يتم تحديد توتر خطوط نقل الطاقة ومقاطع أسلاكها بعد حساب الجدوى الاقتصادية، فكلما بعُدت المسافة بين المنبع والحمل يصبح رفع التوتر مجدي أكثر ومبرر.

إن مردود الدارة الكهربائية –هو نسبة استطاعة الحمل (الاستطاعة المفيدة) إلى حاصل جمع كل الاستطاعات المستهلكة.

$$\eta = \frac{P_L}{P} = \frac{R_L I^2}{rI^2 + R_c I^2 + R_L I^2} = \frac{R_L}{r + R_c + R_L} \qquad (2\text{-}31)$$

من العلاقة (2-31) نستنتج بأن الحصول على مردود عال يتم من خلال تصغير قيمة المقاومة الداخلية للمنبع r ومقاومة أسلاك التوصيل $R_c$.

مثال 2-11:

احسب مردود الدارة المبينة في الشكل 2-11-a، مع العلم أن:

$U_{cd} = 220V, P_L = 200W, R_c = 0.5\Omega, r = 0.1\Omega$.

الحل:

$$I = \frac{P_L}{U_{cd}} = \frac{200}{220} = 0.909A$$

$$\eta = \frac{P_L}{P} = \frac{P_L}{P_r + P_c + P_L} =$$
$$= \frac{200}{0.1 \cdot (0.909)^2 + 0.5 \cdot (0.909)^2 + 200} = 0.998$$

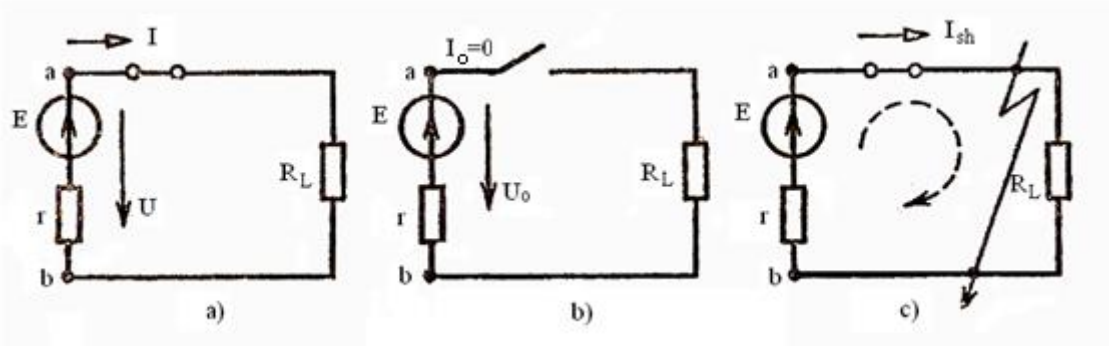
## 3-2- حالات عمل الدارة الكهربائية

## :Work Regimes of Electrical Circuits

إن الدارة الكهربائية المبينة بالشكل 2-12 ، تعمل بحسب قيمة مقاومة الحمل، بحالات مختلفة وهي: أ- الحالة الاسمية. ب-حالة التوافق. ج-حالة اللاحمل. د-حالة القصر.

**أ- عمل الدارة الكهربائية في نظام العمل الاسمي Nominal Regime:**

تعمل عناصر الدارة الكهربائية (المنابع، الأحمال وخطوط النقل) في حالة العمل الاسمية عندما تتطابق شروط عملها مع المعطيات والبارامترات التصميمية.




**الشكل 2-12**

إن زيادة التوتر يؤدي لانهيار العازلية وإلى زيادة تيار الدارة وإلى أضرار أخرى قد تعطب الدارة. لذلك تقوم الجهة المصممة للدارة أو للآلة بتحديد التوتر الاسمي لها وتلتزم بالمعايير العالمية التي تحدد القيم الاسمية فعلى سبيل المثال نذكر بعض القيم القياسية للتوتر وهي: 1000,440,220,110,27V لأجهزة التيار المستمر، و 660,380,220,40V لدارات التيار المتناوب أحادية الطور.

تصمم المنابع والأحمال بحيث تسمح بتبديد كمية حرارة محددة، أي أنها تصمم على استطاعة محددة. وكما نعلم فأن الاستطاعة تتناسب طرداً مع مربع التيار $r \cdot I^2$ و $R_L I^2$. يسمى أكبر تيار مسموح به حرارياً بالتيار الاسمي.

القيمة الاسمية لاستطاعة المنبع–هي أكبر استطاعة يمكن أن يعطيها المنبع للدارة الخارجية، عند شروط العمل الطبيعية، دون حدوث خطر، أي دون انهيار العازلية أو زيادة درجة الحرارة عن الحد المسموح به.

القيمة الاسمية لاستطاعة الحمل (مثل المحرك الكهربائي)–هي الاستطاعة التي يمكن أن ينتجها الحمل (المحرك على محوره) عند الشروط الطبيعية. أما لباقي الأحمال (أجهزة التسخين، أجهزة الإنارة وغيرها) وبشكل عام، القيمة الاسمية –هي القيمة المصمم (المحسوب) على أساسها الجهاز ليعمل بشكل دائم ضمن شروط العمل الطبيعية.

إن القيم الاسمية للتوتر والتيار والاستطاعة تُكتب على لوحة الجهاز وفي نشرته الفنية.

**ب–نظام العمل التوافقي للدارات البسيطة**

**:Maximum Power Transfer Theorem**

في الحالة التوافقية تكون استطاعة الحمل أكبر ما يمكن (عظمى).

فعندما يمر تيار كهربائي من منبع مقاومة الداخلية r إلى الحمل ذي المقاومة $R_L$ (انظر الشكل 2-12-a) فان استطاعة المنبع تساوي :

$$P_1 = EI \qquad (2\text{-}32)$$

والاستطاعة المستهلكة في الحمل هي :

$$P_2 = P_1 - rI^2 = EI - rI^2 \qquad (2\text{-}33$$

(نحصل على الاستطاعة العظمى ( الذروة ) باشتقاق $P_2$ بالنسبة للتيار I ومساواة النتيجة بالصفر:

$$\frac{dP_2}{dI} = E - 2rI = 0 \Rightarrow$$
$$I = \frac{E}{2r} \qquad (2\text{-}34)$$

من الدارة المبينة في الشكل 2-12-a) نجد بأن:

$$I = \frac{E}{r + R_L} \qquad (2\text{-}35)$$

بمقارنة العلاقة (2-34) مع العلاقة (2-35) نجد أن نظام الاستطاعة العظمى يتحقق عندما تتساوي المقاومة الداخلية للمنبع مع المقاومة المكافئة للدارة الخارجية أي أن:

$$r = R_L \qquad (2\text{-}36)$$

يسمى الشرط (2-36) شرط توافق الاستطاعة.

إذاً الحالة التوافقية– هي الحالة التي تحقق مساواة المقاومة الداخلية للمنبع مع مقاومة الحمل وتنتقل عندئذ من المنبع إلى الحمل أكبر استطاعة ممكنة.

إلا أن مردود نظام العمل التوافقي يساوي:

$$\eta = \frac{R_L I^2}{(R_L + r)I^2} = \frac{R_L}{2R_L} = 0.5$$

صغير جداً، لذلك يستخدم نظام العمل التوافقي لحالة الإشارات الضعيفة ولتحقيق حساسية عظمى لأجهزة القياس وفي أجهزة الاتصالات (المستقبلة للإشارات) حيث يكون المطلوب تحقيق أكبر استطاعة ممكنة للجهاز المستقبل وليس للمردود أهمية كبيرة. أما في الدارات ذات الاستطاعة العالية فتكون $r << R_L$ ويكون المردود عالياً.

### ج– حالات اللاحمل والقصر Non Load and Short Circuit:

في حالة اللاحمل تكون الدارة الخارجية مفصولة عن المنبع (انظر الشكل 2-12-b) ويكون التيار $I_o = 0$ يساوي الصفر ويصبح هبوط التوتر على المقاومة الداخلية للمنبع يساوي الصفر $r \cdot I_o = 0$ ويصبح التوتر على خرج المنبع يساوي ق.م.ك. $U = U_o = E$.

من هذه العلاقات نستنتج طريقة قياس ق.م.ك.: تُفصل الدارة الخارجية ويقاس التوتر على طرفي المنبع بواسطة مقياس فولت ذي مقاومة عالية جداً (لانهائية).

في حالة القصر تكون أطراف توصيل خرج المنبع موصلة مع بعضها البعض (مقصورة), كقصر طرفي توصيل الحمل بواسطة سلك توصيل مقاومته تساوي الصفر كما هو مبين في الشكل 2-12-c. فيصبح عندئذ التوتر على طرفي الحمل يساوي الصفر. وتصبح المقاومة الكلية للدارة تساوي المقاومة الداخلية للمنبع r، أما تيار القصر فيساوي:

$I_{sh} = \frac{E}{r}$ ويصل إلى أقصى قيمة يمكن أن يُعطيها المنبع (المدخرة، المولد) مما يتسبب بتسخين المنبع وربما حرقه.

من أجل حماية منابع الطاقة الكهربائية من تيارات القصر تستخدم الفواصم المنصهرة والقواطع الكهروحرارية والكهرومغناطيسية الآلية.

## 2-4- منابع الطاقة الكهربائية Electrical Sources:

### 2-4-1-المنابع الحقيقية:

يوصف المنبع الحقيقي بأنه يتألف من ق.م.ك. E ومقاومة داخلية r مربوطتين على التسلسل كما هو مبين في الشكل 2-12-a. وبحسب قانون أوم العام أو قانون كيرشوف الثاني نجد:

$$U_{ab} = U = E - rI \qquad (2\text{-}37)$$

أي أن التوتر على طرفي المنبع أقل من قوته المحركة الكهربائية بسبب هبوط التوتر على مقاومته الداخلية $r \cdot I$.

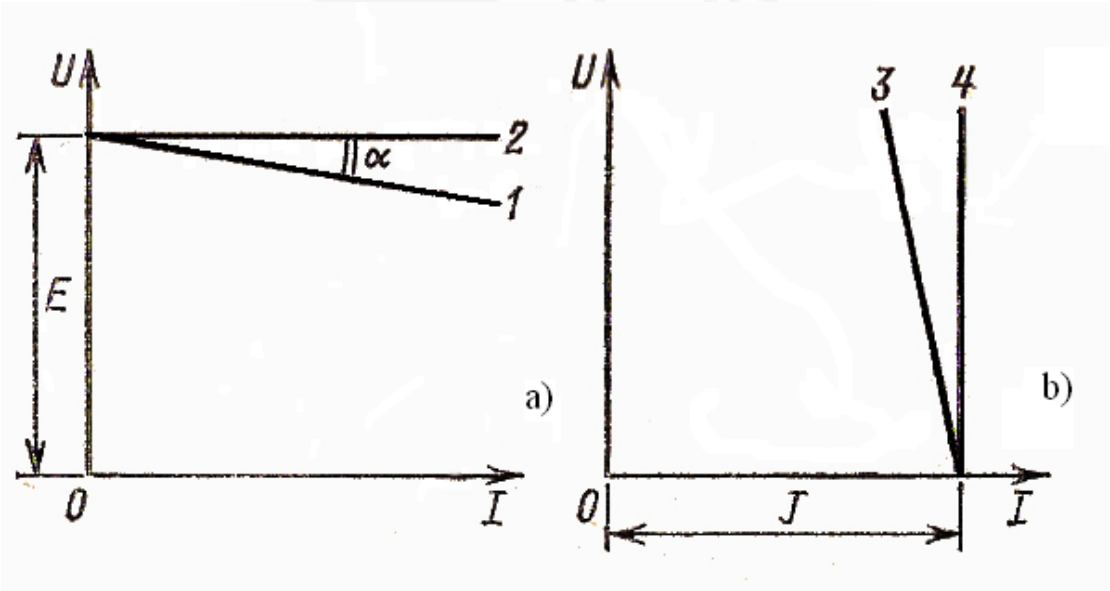
تسمى العلاقة (2-37) التي تبين علاقة توتر المنبع بتياره U=f(I) بميزة (خواص) خرج المنبع (الخط 1 على الشكل 2-13-a).

### 2-4-2- منابع القوة المحركة الكهربائية E.M.F Sources:

عندما تكون $r << R_L$ فأن تيار الدارة يتعلق بشكل أساسي بمقاومة الحمل $R_L$ – ويسمى المنبع في هذه الحالة بمنبع ق.م.ك. أو منبع توتر حيث تكون $U = E$. إن الكثير من منابع الطاقة الكهربائية الحقيقية تعمل بهذا النظام، ويمكن اعتبارها منابع ق.م.ك. مثل: آلات (مولدات) التيار المستمر والبطاريات والمدخرات وغيرها.

فمنابع ق.م.ك. المثالية هي المنابع التي يمكن اعتبار مقاومتها الداخلية تساوي الصفر.

يبين الخط 2 على الشكل 2-13-a خواص خرج المنبع المثالي التي تكون موازية لمحور التيار (السينات).



الشكل 2-13

### 2-4-3-منابع التيار Current Sources:

عندما تكون $r >> R_L$ ، فأن تيار الدارة يتعلق عندئذ ، بشكل أساسي، بالقوة المحركة الكهربائية E وبالمقاومة الداخلية للمنبع r. ويسمى المنبع في هذه الحالة منبع تيار. ويمثل الخط 3 المبين في الشكل 2-13-b خواص خرج منبع التيار. فعلى سبيل المثال تعمل الترانزستورات (BJT) ومنابع الطاقة الذرية غالباً كمنابع تيار.

منابع التيار المثالية J هي المنابع التي يمكن اعتبار مقاومتها الداخلية لانهائية ($r = \infty$).

يبن الخط 4 في الشكل 2-13-b خواص الخرج لمنبع التيار المثالي، وهي عبارة عن خط مواز لمحور التوتر (العينات).

### 2-4-4-تحويل الدارات ذات منبع ق.م.ك. إلى دارات ذات منبع تيار وبالعكس:

يمكن تحويل منبع التوتر الحقيقي، الذي يكون مربوطاً على التسلسل مع المقاومة الداخلية (الشكل 2-12-a) إلى منبع تيار مربوط على التفرع مع الناقلية الداخلية للمنبع. وبالفعل نقسم طرفي العلاقة (2-37) على r فنحصل على:

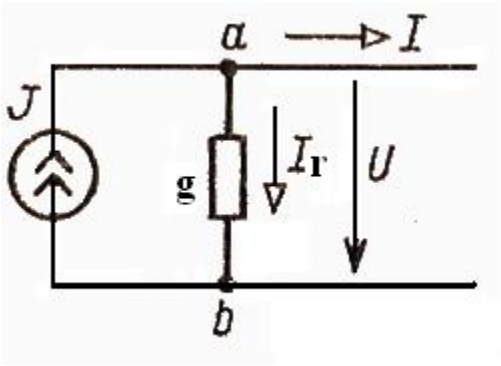
$$\frac{U}{r} = \frac{E}{r} - I \qquad (2\text{-}38)$$

نرمز إلى: $\frac{E}{r} = I_{sh} = J$ (وننبه إلى أن J يتعلق فقط بقيمتي E و r فقط)،

وإلى $\frac{1}{r} = g$ و $\frac{U}{r} = g \cdot U = I_r$. فنحصل على:

$$I_r = J - I \qquad (2\text{-}39)$$

العلاقة (2-39) تتطابق مع الدارة المبينة في الشكل 2-14، حيث يُربط المنبع المثالي للتيار J على التفرع مع الناقلية الداخلية للمنبع g، التي يمر فيها التيار $I_r$.




الشكل 2-14

إذاً يتم الانتقال من الدارة ذات منبع ق.م.ك. إلى الدارة ذات منبع التيار بحسب العلاقات التالية:

$$J = \frac{E}{r}$$
$$g = \frac{1}{r} \qquad (2\text{-}40)$$

ويتم الانتقال من الدارة ذات منبع التيار إلى الدارة ذات منبع الجهد من العلاقات (2-40) نفسها:

$$E = J \cdot r \quad \text{و} \quad r = \frac{1}{g} \qquad (2\text{-}40a)$$

مثال 2-12:

أوجد عناصر منبع التوتر المكافئ لمنبع التيار المبين في الشكل 2-14، مع العلم أن $J = 5A, g = 0.25S$ .

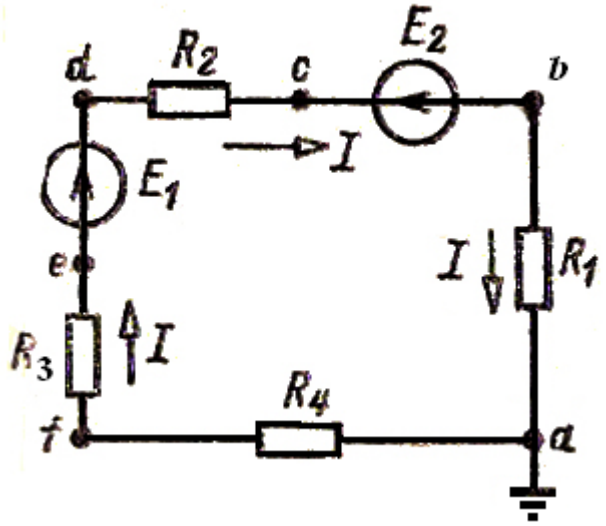
الحل:

$E = J \cdot r = 5 \cdot 4 = 20V, r = \frac{1}{g} = \frac{1}{0.25} = 4\Omega$ (انظر الشكل 2-12-a).

## 2-5-تحديد كمون نقاط الدارة:

عند حساب وتحليل الدارات الكهربائية يلزمنا غالباً تحديد فرق الكمون بين نقاط محددة من نقاط الدارة وتحديد توزع الكمون بين نقاط الدارة. من أجل حل هذه المسألة يجب حساب تيارات الدارة ثم اعتبار كمون أحد نقاط الدارة يساوي الصفر، فعلى سبيل المثال نأخذ كمون النقطة a في الشكل 2-16 يساوي الصفر (يتم عادة تأريض هذه النقطة كما في الشكل 2-16) وبعد ذلك يتم حساب كمون جميع نقاط الدارة. فعلى سبيل المثال للدارة المبينة في الشكل 2-16 يتم تحديد التيار من قانون كيرشوف الثاني:

$$E_1 - E_2 = R_1 I + R_2 I + R_3 I + R_4 I$$
$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$




**الشكل 2-16**

بحسب قانون أوم فأن هبوط التوتر على المقاومة $R_1$ يساوي: $U_{ba} = V_b - V_a = R_1 I$

وحيث أن $V_a = 0$ فيكون: $V_b = R_1 I > V_a$ (يمر التيار من النقطة ذات الكمون الأعلى إلى النقطة ذات الكمون الأقل).

وكذلك فأن: $V_c = E_2 + V_b = E_2 + R_1 I \Leftarrow U_{cb} = V_c - V_b = E_2$

(بما أن اتجاه التيار I يعاكس اتجاه ق.م.ك. $E_2$ لذلك فأن المنبع المثالي $E_2$ يعمل في نظام استهلاك الطاقة).

إن هبوط التوتر على المقاومة $R_2$ هو: $U_{dc} = V_d - V_C = R_2 I$، أي أن كمون النقطة d أكبر من كمون النقطة c بمقدار هبوط التوتر على المقاومة $R_2$ أي أن: $V_d = V_c + R_2 I$ (يمكن أن تكون $R_2$ المقاومة الداخلية للمنبع $E_2$ إذا كان ليس مثالياً).

بشكل مشابه نحدد كمون باقي النقاط:

$$V_f = V_e + R_3 I \Leftarrow V_f - V_e = R_3 I \quad \text{و} \quad V_e = V_d - E_1 \Leftarrow V_e - V_d = -E_1$$

وأخيراً فأن كمون النقطة a $V_a = V_f + R_4 I$ يجب أن يساوي الصفر وبهذا نتأكد من أن الحسابات صحيحة.

**أسئلة ومسائل غير محلولة:**

1-عرف القوة المحركة الكهربائية، التوتر، الكمون، فرق الكمون. (الإجابات في الفقرات 2-1-7، 2-1-6، 2-1-5).

2- اشرح العمليات الفيزيائية التي تحصل في دارة كهربائية مغلقة بسيطة. (الإجابة في الفقرة 1-3).

3- اشرح معنى كل من: الفرع (الرئيسي)، العقدة (الرئيسية)، الحلقة للدارة الكهربائية. (الإجابات في الفقرة 1-5).

4-اكتب العلاقات الرياضية لقانون أوم في الأجزاء الفعالة وغير الفعال من الدارة ولقانوني كيرشوف. (الإجابة في الفقرات: 2-2-1و 2-2-3 و 2-2-4).

5-اكتب علاقات تحديد الطاقة والاستطاعة في الدارة الكهربائية للمنبع وللحمل. (الإجابة في الفقرة 2-2-5).

6-عدد خصائص كل من النظام التوافقي ونظام اللاحمل ونظام القصر. (الإجابات في الفقرة 2-3).

7-ارسم خواص الخرج الحقيقية والمثالية لمنبع ق.م.ك. ولمنبع التيار. (الإجابة في الفقرة 2-4).

8-حمل استطاعته $1kW$ وتوتره الاسمي 220V تم توصيله إلى شبكة توترها 110V. والمطلوب:

أ-كم تصبح استطاعة الحمل في هذه الحالة (عند توصيله إلى 110V).

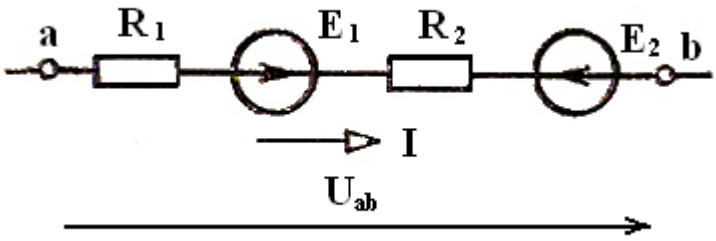
ب- ما شدة تيار الحمل عندما يكون التوتر اسمي وما شدته عند التوتر 110V.

الأجوبة: P=250W ; $I = 2.27A; I_n = 4.55A$ .

9-للدارة المبينة في الشكل 2-12-a ارسم توابع علاقات ربط توتر الحمل والاستطاعة التي يُعطيها المنبع واستطاعة الحمل مع التيار $P_2(I), P_1(I), U(I)$ ، وذلك عندما $r = 4\Omega$ و $E = 20V$ .

10-لجزء الدارة المبين بالشكل 2-17 اكتب علاقة لتحديد قيمة الجهد $U_{ab}$. وما هي قيمة كمون النقطة a إذا كان كمون b=0، مع العلم بأن $E_2 = 10V, E_1 = 5V, R_1 = R_2 = 2\Omega, I = 1A$ .

الجواب: 9V.




**الشكل 2-17**

## 2-6- طرق حساب الدارات الكهربائية وخصائصها

## :Electrical Circuits analysis

### 2-6-1-وضع المسألة وحلها:

تتلخص مسألة تحليل الدارة الكهربائية بشكل عام بإيجاد التيارات والاستطاعات والتوترات على طرفي بعض العناصر عند قيم معلومة للمقاومات وللقوى المحركة الكهربائية.

يرتكز حل المسائل على استخدام قوانين أوم وكيرشوف. فقانون أوم يستخدم من أجل حساب التيار أو التوتر مثلاً لأجزاء محددة من الدارة، أما قانوني كيرشوف فتستخدم لحساب الدارات الصعبة.

إن حل المسائل باستخدام قانوني كيرشوف بشكل مباشر يتطلب وضع وحل عدد كبير نسبياً من المعادلات. لذلك وبهدف تبسيط عملية الحل ابتُكرت مجموعة طرق لحساب الدارات الكهربائية (فعلى سبيل المثال، طريقة تيارات الحلقات، وطريقة كمون العقد) والتي هي مستنبطة من قوانين

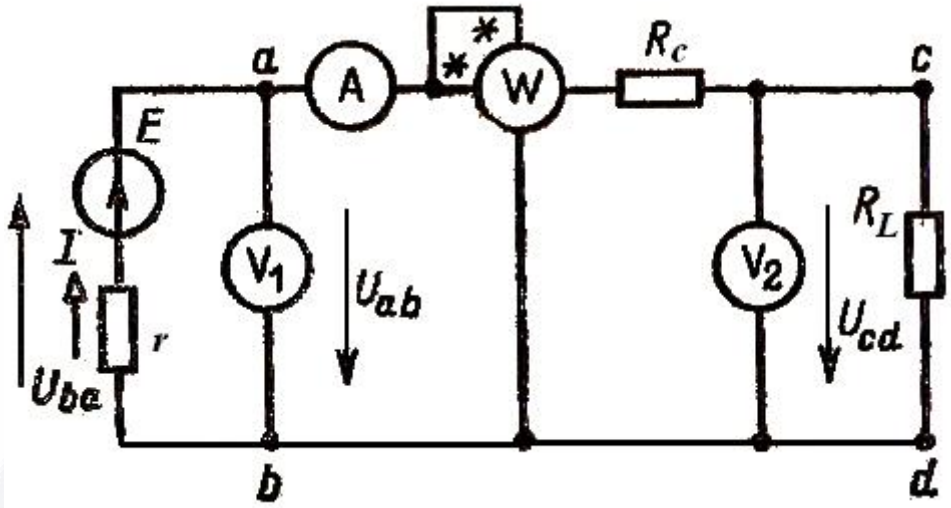
كيرشوف. كما تُستخدم طرق مبنية على معرفة خواص الدارات الكهربائية الخطية مثل: طريقة التراكم وطريقة ثفينين ونورتن وغيرها.

نستعرض فيما يلي أكثر الطرق انتشاراً.

### 2-6-2- طريقة استخدام قانون أوم بشكل مباشر:

يستخدم قانون أوم لحساب المقادير الكهربائية على أطراف الأجزاء الفعالة وغير الفعالة من الدارة الكهربائية، وذلك بالاعتماد على العلاقات (2-17) و (2-18).

مثال 2-13:




**الشكل 2-18**

للدارة المبينة في الشكل 2-18 حدد القيم التي تُشير إليها أجهزة القياس، مع العلم بأن:

$E = 100V, r = 1\Omega, R_c = 3\Omega, R_L = 6\Omega$ .

الحل:

يمكن تحديد قيمة تيار الدارة (القيمة التي يُشير إليها مقياس الأمبير) باستخدام قانون كيرشوف الثاني:

$$E = r \cdot I + R_c I + R_L I \Rightarrow$$

$$I = \frac{E}{r + R_c + R_L} = \frac{100}{1+3+6} = 10A$$

نستخدم قانون أوم (2-17) للجزء غير الفعال من الدارة، ونجد القيمة، التي يُشير إليها مقياس الفولت الثاني:

$$U_{cd} = R_L I = 6 \cdot 10 = 60V$$

نستخدم قانون أوم (2-18) للجزء الفعال من الدارة لنجد قراءة مقياس الفولت الأول:

$$I = \frac{E - U_{ab}}{r} \Rightarrow$$

$$U_{ab} = E - r \cdot I = 100 - 1 \cdot 10 = 90V$$

يقيس مقياس الواط استطاعة جزء الدارة الموصول معه:

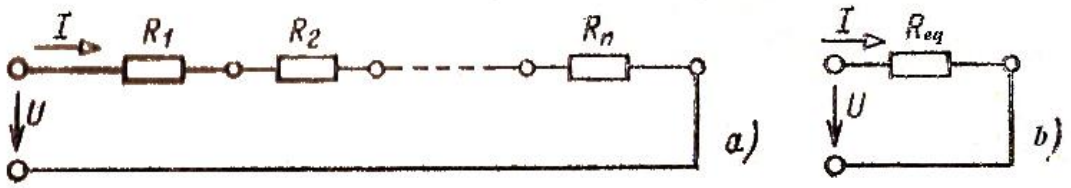
$$P = U_{ab} I = 90 \cdot 10 = 900W$$

الاستطاعة P– هي الاستطاعة التي يُعطيها المنبع للدارة الخارجية، أو هي استطاعة الضياعات في أسلاك النقل (في المقاومة $R_c$) واستطاعة الحمل ($R_L$).

### 2-6-3- طريقة التحويلات المتكافئة للدارة:

يتم في هذه الطريقة تحويل الدارة الكهربائية أو بعض أجزاءها إلى دارة أو أجزاء مكافئة (equavalent) وأكثر بساطة وأسهل للحساب من الدارة الأساسية، وبحيث تبقى عندئذ تيارات وتوترات الأجزاء التي لم تتحول من الدارة دون تغيير (نفسها). وفيما يلي نستعرض أكثر طرق التحويلات المتكافئة انتشاراً.

**أ– الربط التسلسلي للمقاومات Series connection of resistances:**




**الشكل 2-19**

في حالة التوصيل التسلسلي (انظر الشكل 2-19-a) يوصل أحد قطبي توصيل المقاومة السابقة مع أحد قطبي توصيل المقاومة التالية، بحيث نحصل بعد إنهاء جميع التوصيلات على جزء من دارة ذات قطبي توصيل فقط. لذلك فأن نفس التيار يمر في جميع العناصر الموصلة تسلسلياً.

نستبدل العناصر المربوطة مع بعضها على التسلسل بعنصر مكافئ مقاومته $R_{eq}$ كما في الشكل 2-19-b.

للدارة المبينة في الشكل 2-19-a يكون التوتر على طرفي الدارة يساوي لمجموع هبوطات التوترات على المقاومات. أي أن:

$$U = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \cdots + R_n I = (R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n) I$$

وللدارة المبينة في الشكل 2-19-b لدينا:

$$U = R_{eq} I \qquad (2\text{-}41)$$

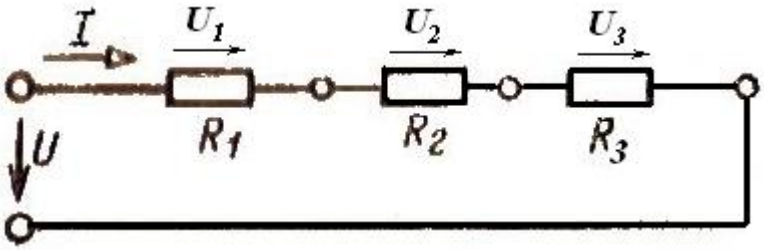
من شروط التكافؤ يجب أن تمر نفس قيمة التيار I في الدارتين 2-19-a و 2-19-b عند نفس التوتر U، لتحقيق ذلك يجب أن تتحقق المساواة التالية:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \qquad (2\text{-}42)$$

أي أن المقاومة المكافئة في حالة الربط التسلسلي للمقاومات تساوي لمجموع المقاومات المربوطة مع بعضها على التسلسل.

مثال 2-14:

للدارة المبينة في الشكل 2-20 لدينا: $R_3 = 6\Omega, R_2 = 2\Omega, R_1 = 4\Omega, U = 24V$ ، والمطلوب حساب التيار وهبوط التوتر على كل مقاومة من مقاومات الدارة.




**الشكل 2-20**

الحل:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 4 + 2 + 6 = 12\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{24}{12} = 2A$$

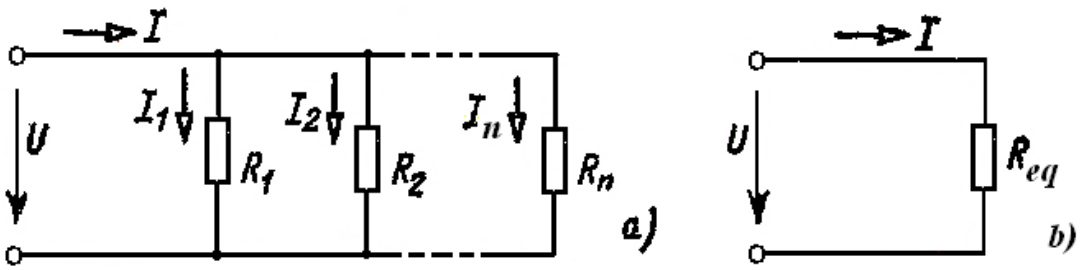
$$U_1 = R_1 I = R_1 \frac{U}{R_{eq}} = 4 \cdot 2 = 8V$$

$$U_2 = R_2 I = R_2 \frac{U}{R_{eq}} = 2 \cdot 2 = 4V$$

$$U_3 = R_3 I = R_3 \frac{U}{R_{eq}} = 6 \cdot 2 = 12V$$

**ب- الربط التفرعي للمقاومات Parallel connection of resistances**:

في حالة الربط التفرعي توصل جميع العناصر إلى نفس زوج أقطاب التوصيل. عندئذ يكون نفس التوتر مسلط على جميع العناصر.




**الشكل 2-21**

بحسب قانون كيرشوف الأول للدارة المبينة في الشكل 2-21-a نجد:

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n \qquad (2\text{-}43)$$

وبحسب قانون أوم مع الأخذ بالحسبان بأن لكل فرع $I_k = \frac{U_k}{R_k}$ يكون:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + ... + \frac{U}{R_n} = U(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}) \qquad (2\text{-}44)$$

نستبدل العناصر (المقاومات) المربوطة على التفرع بعنصر مكافئ واحد ذي مقاومة مكافئة $R_{eq}$ كما هو مبين في الشكل 2-21-b.

إن تيار الدارة المبينة في الشكل 2-21-b هو:

$$I = \frac{U}{R_{eq}} \qquad (2\text{-}45)$$

من شروط التكافؤ يجب أن يمر نفس التيار I في كلتا الدارتين المبينتين في الشكلين2-21-a و b عند نفس الجهد U. لذلك فأن:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + .... + \frac{1}{R_n} \qquad (2\text{-}46)$$

وللناقلية:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + .... + G_n + \sum_{k=1}^{n} G_k \qquad (2\text{-}47)$$

أي أن الناقلية المكافئة للمقاومات المربوطة على التفرع تساوي لمجموع ناقلياتها.

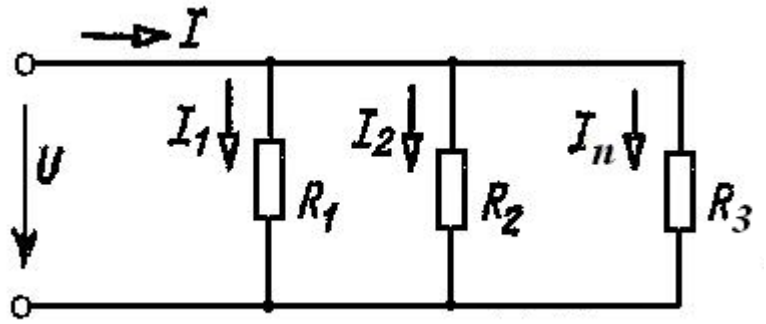
كحالة خاصة عندما ترتبط مقاومتين على التفرع تصبح الناقلية والمقاومة المكافئة للدارة كما يلي:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 \qquad (2\text{-}48)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (2\text{-}49)$$

مثال 2-15:

للدارة المبينة في الشكل 2-22 احسب قيم المقاومة المكافئة وجميع تيارات الدارة، مع العلم أن:
$U = 200V, R_3 = 20\Omega, R_2 = 100\Omega, R_1 = 25\Omega$.




**الشكل 2-22**

الحل:

الناقلية والمقاومة المكافئة للدارة:

$$G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} + \frac{1}{20} = \frac{10}{100}[S]$$

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{100}{10}10\Omega$$

التيار الكلي في الدارة:

$$I = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{200}{10} = 20A$$

التيارات المارة في الفروع:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{200}{25}8A$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{200}{100} = 2A$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{200}{20} = 10\Omega$$

التأكد من قيمة التيار الكلي:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 8 + 2 + 10 = 20A$$

### ج- الربط المختلط للمقاومات Mixed connection of resistances:

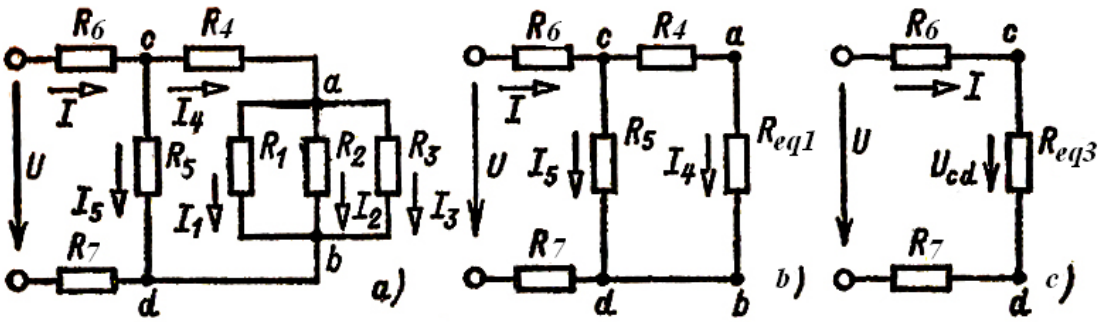
في حالة الربط المختلط للمقاومات تربط بعض المقاومات على التفرع وبعضها الأخر على التسلسل. ويتم إيجاد قيمة المقاومة المكافئة عن طريق التبسيط التدريجي للدارة حتى نحصل على دارة بمقاومة

واحدة (مكافئة)، ولإيجاد قيم التيارات في فروع الدارة يجب القيام بعملية عكسية. نبين ما ذكرناه سابقاً على المثال التالي.

مثال 2-16:

للدارة المبينة في الشكل 2-23-a أوجد المقاومة المكافئة للدارة وجميع التيارات، مع العلم بأن:

$$U = 200V,, R_6 = R_7 = 5\Omega, R_5 = 20\Omega, R_4 = 10\Omega, R_3 = 20\Omega, R_2 = 100\Omega, R_1 = 25\Omega$$




الشكل 2-23

الحل:

من المثال السابق وجدنا المقاومة المكافئة للمقاومات $R_1, R_2, R_3$ الموصلة على التفرع:

$$G_{eq1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10}[S]$$

$$R_{eq1} = \frac{1}{G_{eq1}} 10\Omega$$

فتصبح الدارة المكافئة كما يبين الشكل 2-23-b، وفيها المقاومتان $R_{eq1}$ و $R_4$ مربوطة على التسلسل،لذلك فأن:

$$R_{eq2} = R_{eq1} + R_4 = 10 + 10 = 20\Omega$$

فتصبح المقاومتان $R_{eq2}$ و $R_5$ موصلتين على التفرع بين النقطتين c و d، والمقاومة المكافئة لهاتين المقاومتين هي:

$$R_{eq3} = \frac{R_{eq2} \cdot R_5}{R_{eq2} + R_5} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10\Omega$$

فتتحول الدارة المبينة في الشكل 2-23-b إلى الدارة المبينة في الشكل 2-23-c، التي فيها جميع المقاومات موصلة على التسلسل وتصبح المقاومة المكافئة للدارة:

$$R_{eq} = R_{eq3} + R_6 + R_7 = 10 + 5 + 5 = 20\Omega$$

نحدد قيمة التيار الكلي I:

$$I = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{200}{20} = 10A$$

نحدد مقدار التوتر بين النقطتين c و d من قانون أوم، وذلك من أجل حساب التيارات الفرعية:

$$U_{cd} = R_{eq3} I = 10 \cdot 10 = 100V$$

نحدد قيمتي التيارين $I_4$ و $I_5$:

$$I_4 = \frac{U_{cd}}{R_{eq2}} = \frac{100}{20} = 5A$$

$$I_5 = \frac{U_{cd}}{R_5} = \frac{100}{20} = 5A$$

نحدد مقدار التوتر بين النقطتين a و b:

$$U_{ab} = R_{eq1} \cdot I_4 = 10 \cdot 5 = 50V$$

والتيارات في الفروع تساوي:

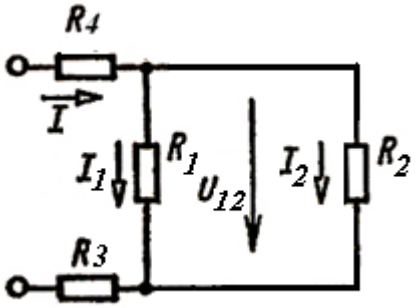
$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = \frac{50}{25} = 2A$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{50}{100} = 0.5A$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{50}{20} = 2.5A$$

**قانون تفرع التيار:**

يمكن للدارة السابقة إيجاد قيمة التيار $I_5$ مثلاً بطريقة أُخرى وذلك بحسب قانون التفريع:




**الشكل 2-24**

للدارة المبينة في الشكل 2-24 يمكن أن نكتب العلاقات التالية:

$$U_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \qquad (2\text{-}50)$$

تسمى العلاقة (2-50) بقانون تفرع التيار.

بشكل مشابه نكتب العلاقة للتيار $I_2$ :

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

مثال 2-17:

ما هي قيمة التيار $I_5$ للمثال السابق:

الحل:

$$I_5 = I \frac{R_{eq2}}{R_{eq2} + R_5} = 10 \frac{20}{20 + 20} = 5A$$

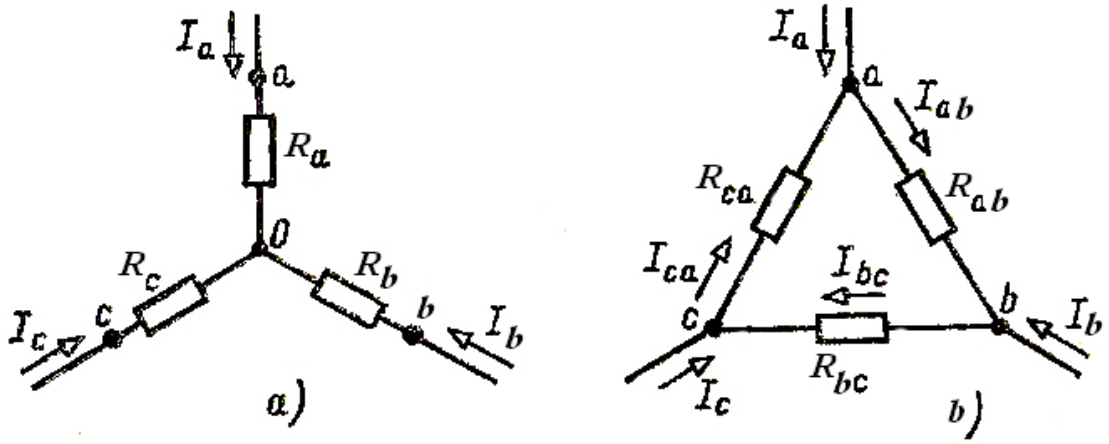
**د- التحويل المتبادل بين الوصل النجمي والمثلثي**

**:Exchange of the Star (Y) – Delta ($\Delta$) connected**

قد نصادف دارات كهربائية لا يمكن أن تنسب توصيلاتها إلى الأنواع الثلاثة السابقة، مثل الوصل النجمي للمقاومات كما في الشكل 2-25-a والوصل المثلثي للمقاومات كما في الشكل 2-25-b.

إن تحويل الوصل النجمي إلى مثلثي أو بالعكس يسمح في كثير من الحالات تبسيط الدارة إلى دارة تكون مقاوماتها موصلة بشكل مختلط.

إن شرط التحويلات المتكافئة من دارة إلى أخرى ($Y \leftarrow \Delta$ أو بالعكس) هو يجب أن تبقى التوترات $U_{ab}, U_{bc}, U_{ca}$ دون تغيير عند نفس التيارات $I_c, I_b, I_a$ .




**الشكل 2-25**

نكتب بحسب قانون كيرشوف الثاني معادلة لحلقة الوصل المثلثي (2-25-b):

$$R_{ab}I_{ab} + R_{bc}I_{bc} + R_{ca}I_{ca} = 0 \qquad (2\text{-}51)$$

وبحسب قانون كيرشوف الأول نكتب للعقدتين a و b العلاقتين التاليتين:

$$\begin{aligned} I_{ca} &= I_{ab} - I_a \\ I_{bc} &= I_{ab} + I_b \end{aligned} \qquad (2\text{-}52)$$

بوضع (2-52) في (2-51) ينتج:

$$R_{ab}I_{ab} + R_{bc}I_{ab} + R_{bc}I_b + R_{ca}I_{ab} - R_{ca}I_a = 0$$

ومنها:

$$I_{ab} = \frac{R_{ca}I_a - R_{bc}I_b}{R_{ab} + R_{bc} + R_{cb}}$$

$$U_{ab} = R_{ab}I_{ab} = \frac{R_{ca}R_{ab}I_a - R_{bc}R_{ab}I_b}{R_{ab} + R_{bc} + R_{cb}} \qquad (2\text{-}53)$$

للدارة ذات الوصل النجمي يكون التوتر $U_{ab}$ يساوي للفرق بين هبوط التوتر على المقاومة $R_a$ وهبوط التوتر على $R_b$، أي أن:

$$U_{ab} = R_aI_a - R_bI_b \qquad (2\text{-}54)$$

من مقارنة (2-53) مع (2-54) ينتج:

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \qquad (2\text{-}55)$$

$$R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \qquad (2\text{-}56)$$

وبشكل مشابه فأن:

$$R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \qquad (2\text{-}57)$$

تسمح العلاقات (2-55) – (2-57) بتحويل مثلث المقاومات إلى مقاومات موصلة بشكل نجمي مكافئة. أما علاقات التحويل من نجمي إلى مثلثي فنحصل عليها باستبدال المقاومات بالناقليات في العلاقات السابقة:

$$G_{ab} = \frac{G_a G_b}{G_a + G_b + G_c}$$
$$G_{bc} = \frac{G_b G_{bc}}{G_a + G_b + G_c} \qquad (2\text{-}58)$$
$$G_{ca} = \frac{G_c G_a}{G_a + G_b + G_c}$$

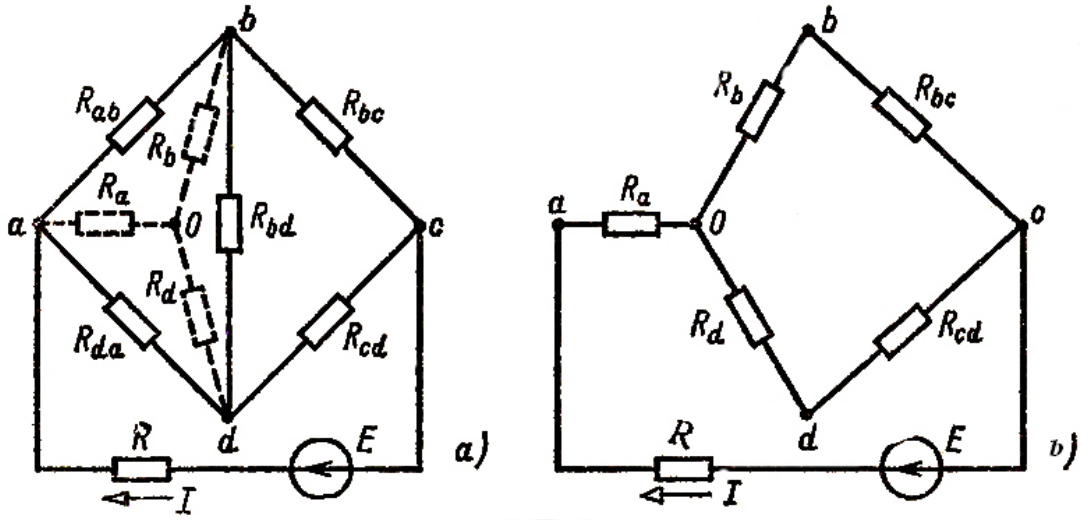
يمكن تعميم العلاقات السابقة لحالة n ضلع:

$$G_{ij} = \frac{G_i G_j}{\sum_{k=1}^{n} G_k} \qquad (2\text{-}59)$$

مثال 2-18:

للدارة الجسرية المبينة في الشكل 2-26-a حدد قيمة التيار في المقاومة R ، مع العلم أن:

$R_{da} = 20\Omega, R_{bc} = 8\Omega, R_{cd} = R_{ab} = R_{bd} = 10\Omega, R = 5\Omega, E = 50V$ .




الشكل **2-26**

الحل:

نحول الوصل المثلثي للمقاومات $R_{da}, R_{bd}, R_{ab}$ إلى وصل نجمي مكافئ للمقاومات $R_d, R_b, R_a$ كما يبين الخط المتقطع في الشكل 2-26-a، فنحصل نتيجة لهذا التحويل دارة وصل مختلط للمقاومات كما هو مبين في الشكل 2-26-b.

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{da}}{R_{ab}+R_{bd}+R_{da}} = \frac{10\cdot 20}{10+10+20} = 5\Omega$$

$$R_b = \frac{R_{bd}R_{ab}}{R_{ab}+R_{bd}+R_{da}} = \frac{10\cdot 10}{40} = 2.5\Omega$$

$$R_d = \frac{R_{da}R_{bd}}{R_{ab}+R_{bd}+R_{da}} = \frac{20\cdot 10}{40} = 5\Omega$$

المقاومة المكافئة للدارة:

$$R_{eq} = R + R_a + \frac{(R_b+R_{bc})(R_d+R_{cd})}{R_b+R_{bc}+R_d+R_{cd}} =$$

$$= 5+5+\frac{(2.5+8)(5+10)}{2.5+8+5+10} = 10+\frac{157.5}{25.5} = 16.18\Omega$$

التيار في المقاومة R:

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{50}{16.18} = 3.1A$$

**هـ تحويل الفروع التي تحتوي على ق.م.ك. Source E.M.F. Combination:**

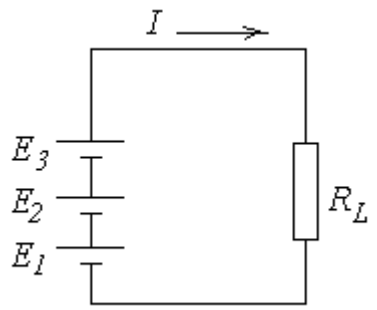
في بعض الحالات يتم جمع أكثر من خلية ق.م.ك. في دارة كهربائية واحدة وذلك بهدف الحصول على تيار أو ق.م.ك. أكبر.

يتم ربط الخلايا تسلسلياً وذلك بربط القطب الموجب للأولى مع السالب للثانية والموجب للثانية مع السالب للثالثة وهكذا ... فيبقى لدينا القطب السالب للخلية الأولى والموجب للخلية الأخيرة اللذان يشكلان قطبي المدخرة كما في الشكل 2-27.

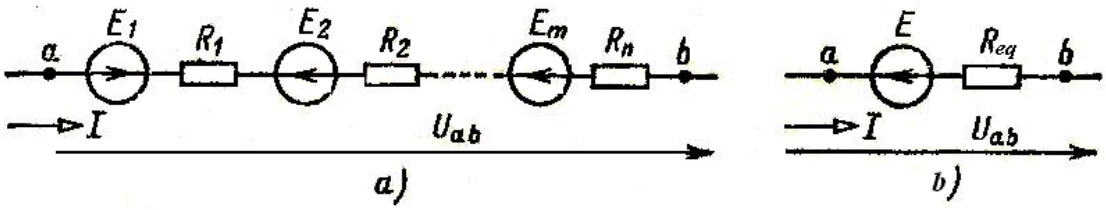
فتكون القوة المحركة الكهربائية المكافئة، للحالة المبينة في الشكل 2-27 ، تساوي:

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

وفي حال وجود مقاومات موصلة مع الخلايا على التسلسل (الشكل 2-28) فأن فرق الكمون بين النقطتين a و b يساوي:



الشكل 2-27




الشكل 2-28

$$U_{ab} = V_a - V_b = R_1 I - E_1 + E_2 + R_2 I + ... + E_m + R_n I =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} E_k + \sum_{k=1}^{n} R_k I$$

أي أن:

$$E_{eq} = \sum_{k=1}^{m} E_k$$
$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k \qquad (2\text{-}60)$$

أي أن التوتر $U_{ab}$ يساوي:

$$U_{ab} = E_{eq} + R_{eq} I \qquad (2\text{-}61)$$

العلاقة (2-61) تتطابق مع الدارة المكافئة المبينة في الشكل 2-28-b.

إذاً في الفروع التسلسلية من الدارة تكون:

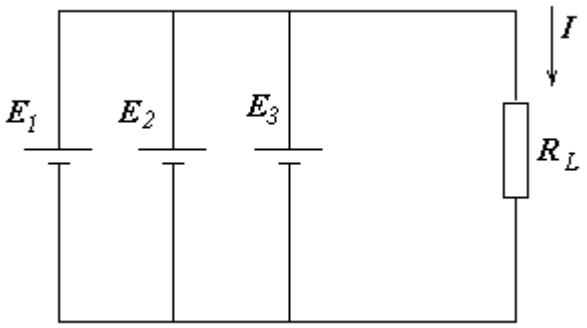
القوة المحركة الكهربائية المكافئة تساوي للمجموع الجبري للقوى المحركة الكهربائية الموصلة على التسلسل، والمقاومة المكافئة تساوي للمجوع الجبري للمقاومات الموصلة على التسلسل.

يتم الوصل التفرعي للخلايا بربط أقطابها الموجبة مع بعضها البعض وأقطابها السالبة مع بعضها البعض، كما هو مبين في الشكل 2-29.

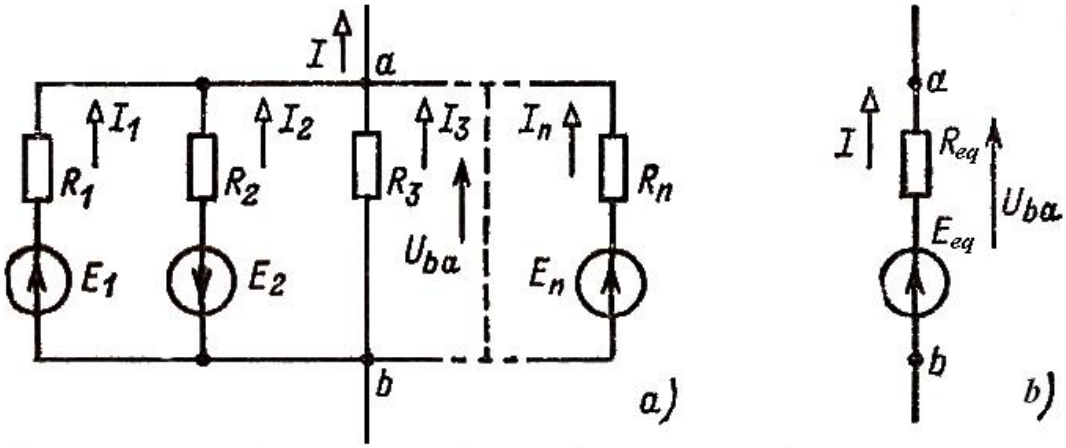
إن الهدف من الجمع التفرعي للقوى المحركة الكهربائية هو الحصول على تيار كبير.

عندما توصل الخلايا مع بعضها من دون مقاومات إضافية يجب أن يتحقق شرط تساوي جميع القوى المحركة الكهربائية، أي أن:

$$E = E_1 = E_2 = E_3$$




الشكل **2-29**




الشكل **2-30**

عند الوصل التفرعي للفروع التي تحتوي على ق. م.ك. ومقاومات (الشكل 2-30-a) يصبح التيار يساوي:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 .... + I_n \qquad (2\text{-}62)$$

والتيارات في الفروع بحسب قانون أوم العام تساوي:

$$\begin{aligned} I_1 &= (U_{ba} + E_1)G_1 \\ I_2 &= (U_{ba} - E_2)G_2 \\ I_3 &= G_3 U_{ba} \\ &. \\ &. \\ I_n &= (U_{ba} + E_n)G_n \end{aligned} \qquad (2\text{-}63)$$

بوضع قيم التيارات من (2-63) في (2-62) نحصل على:

$$I = G_1E_1 + G_1U_{ba} - G_2E_2 + G_2U_{ba} + G_3U_{ba} + .... + G_nE_n + G_nU_{ba} =$$
$$= G_1E_1 - G_2E_2 + .... + G_nE_n + (G_1 + G_2 + G_3 + .... + G_n)U_{ab} =$$

$$I = \sum_{k=1}^{n} G_k E_k + U_{ab} \sum_{k=1}^{n} G_k \qquad (2\text{-}64)$$

وللدارة المكافئة المبينة في الشكل 2-30 لدينا:

$$I = G_{eq}(E_{eq} + U_{ab}) = G_{eq}E_{eq} + G_{eq}U_{ab} \qquad (2\text{-}65)$$

بمقارنة علاقة التيار (2-64) للدارة المبينة في الشكل 2-30-a مع علاقته (2-65) للدارة المكافئة المبينة في الشكل 2-30-b نحصل على:

$$\begin{aligned} G_{eq} &= \sum_{k=1}^{n} G_k \\ G_{eq}E_{eq} &= \sum_{k=1}^{n} G_k E_k \end{aligned} \qquad (2\text{-}66)$$

ومنها نحصل على علاقة تحديد القيمة المكافئة للقوى المحركة الكهربائية الموصلة على التفرع:

$$E_{eq} = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k E_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} \qquad (2\text{-}67)$$

أي أن القوة المحركة الكهربائية المكافئة عند الوصل التفرعي للفروع تساوي المجموع الجبري لحاصل ضرب القوة المحركة الكهربائية لكل فرع بناقليته على مجموع ناقليات الفروع.

إذا كان اتجاه ق.م.ك. في أحد الفروع معاكس للاتجاه المختار للقوة المحركة الكهربائية المكافئة فيجب أن يؤخذ حدها $G_k E_k$ بإشارة ناقص، وإذا وجد فرع دون ق.م.ك. فيجب أن يختفي الحد $G_k E_k$ لهذا الفرع.

مثال 2-19:

للجزء من الدارة الكهربائية المبينة في الشكل 2-31-a لدينا:

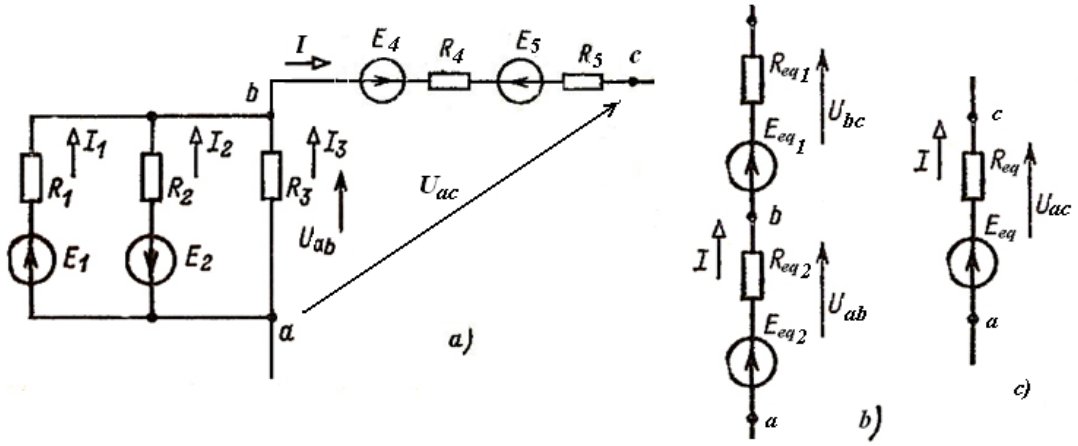
$E_1 = 9V, E_2 = 6V, E_4 = 12V, E_5 = 9V, R_1 = 2\Omega, R_2 = 5\Omega, R_3 = 20\Omega, R_4 = 5\Omega, R_5 = 10\Omega$

والمطلوب تحديد قيمة المقاومة المكافئة والقوة المحركة الكهربائية المكافئة لهذا الجزء من الدارة.

الحل:

للجزء ab لدينا:

$$G_{eq2} = \sum_{k=1}^{n} G_k = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{15}{20}[S]$$




الشكل **2-31**

إذاً: للجزء التفرعي لدينا:

$$R_{eq2} = \frac{1}{G_{eq2}} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} = 1.333\Omega$$

$$E_{eq2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k E_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{6}{5}}{\frac{15}{20}} = \frac{33/10}{15/20} = \frac{660}{150} = 4.4V$$

وللجزء التسلسلي لدينا:

$$E_{eq1} = E_4 + E_5 = 12 - 9 = 3V$$

$$R_{eq1} = R_4 + R_5 = 5 + 10 = 15\Omega$$

الدارة المكافئة للجزئين التفرعي والتسلسلي مبينة في الشكل 2-31-b.

بجمع المقاومات المكافئة وق.م.ك. المكافئة نحصل على الدارة المكافئة المبينة في الشكل 2-31-c. وفيها:

$$E_{eq} = E_{eq1} + E_{eq2} = 3 + 4.4 = 7.4V$$

$$R_{eq} = R_{eq1} + R_{eq2} = 15 + 1.333 = 16.333\Omega$$

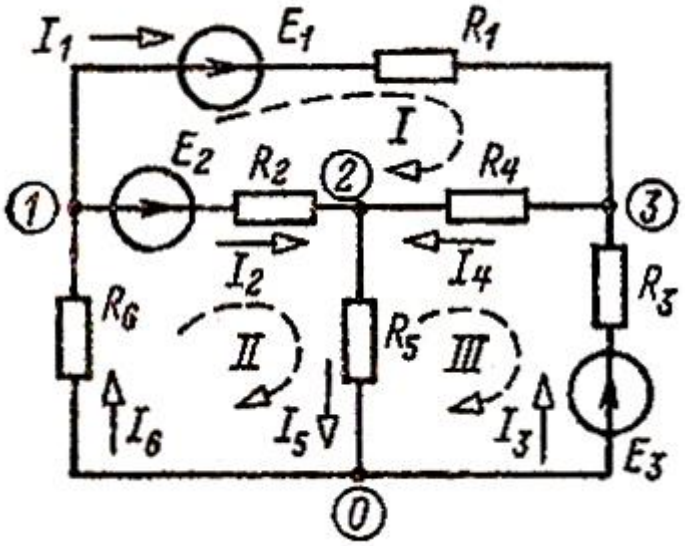
## 2-6-4- طريقة استخدام قوانين كيرشوف بشكل مباشر

:Analysis by using Kirchhoff's Laws

إن قوانين كيرشوف هي قوانين عامة يمكن استخدامها لإجراء الحسابات في أي دارة كهربائية.

لإجراء هذه الحسابات يجب إتباع تسلسل معين نوضحه فيما يلي على مثال الدارة المبينة في الشكل 2-32:

1- نحدد اتجاه موجب اختياري لمرور التيارات في كافة الفروع ويفضل اختيار نفس اتجاه ق.م.ك.




**الشكل 2-32**

2-نحدد عدد العقد الرئيسية في الدارة N (ونرمز لكل عقدة برقم 3,2,1,0 على الشكل 2-32) ومنه نحدد عدد المعادلات التي يجب كتابتها بحسب قانون كيرشوف الأول:

$$K_1 = N - 1 \qquad (2\text{-}68)$$

3- نحدد عدد المعادلات التي يجب كتابتها بحسب قانون كيرشوف الثاني، وذلك انطلاقاً من أن العدد الكلي للمعادلات يجب أن يساوي لعدد التيارات المراد حسابها، أي يساوي لعدد الفروع B، فيكون عدد المعادلات الناتجة من قانون كيرشوف الثاني يساوي:

$$K_2 = B - K_1 = B - N + 1 \qquad (2\text{-}69)$$

4- كتابة المعادلات.

عند كتابة $N-1$ معادلة بحسب قانون كيرشوف الأول نأخذ التيارات الداخلة إلى العقدة بإشارة (+) والإشارات الخارجة منها بإشارة (-) أو بالعكس، كما ذكرنا سابقاً. وعند تحديد الحلقات من أجل كتابة $B-N+1$ معادلة بحسب قانون كيرشوف الثاني يجب الانتباه بأن تحتوي كل حلقة على فرع واحد على الأقل لم يدخل في الحلقات الأخرى التي كُتبت لها المعادلات سابقاً.

يتم بشكل اختياري تحديد اتجاه التفاف الحلقة وتُكتب القوة المحركة الكهربائية بإشارة (+) إذا توافق اتجاهها مع اتجاه الالتفاف وبإشارة (-) في حالة عدم التوافق، وبشكل مشابه يكتب هبوط التوتر RI بإشارة (+) في حال تطابق اتجاه التيار مع اتجاه الالتفاف وبإشارة (-) في حالة عدم التطابق.

للدارة المبينة في الشكل 2-32 نكتب:

ثلاث معادلات بحسب قانون كيرشوف الأول $K_1 = N - 1 = 4 - 1 = 3$ ، وهي:

للعقدة الأولى 1 $\quad I_6 - I_1 - I_2 = 0$

للعقدة الثانية 2 $\quad I_2 + I_4 - I_5 = 0 \qquad (2\text{-}70)$

للعقدة الثالثة 3 $\quad I_1 + I_3 - I_4 = 0$

إذا كتبنا معادلة رابعة للعقدة 0 فلن تفيدنا بشيء في حل المسألة.

ونكتب ثلاث معادلات بحسب قانون كيرشوف الثاني $K_2 = B - K_1 = B - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ :

للحلقة الأولى I $\quad R_1 I_1 + R_4 I_4 - R_2 I_2 = E_1 - E_2$

للحلقة الثانية II $\quad R_2 I_2 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_2 \qquad (2\text{-}71)$

للحلقة الثالثة III $\quad R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_3 \Leftarrow -R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = -E_3$

أصبح لدينا ست معادلات بست تيارات مجهولة وبحل هذه المعادلات حلاً مشتركاً نحدد قيم التيارات المجهولة، فإذا حصلنا على قيمة سالبة لتيار ما فهذا يعني بأن اتجاهه بعكس اتجاهه المُختار على الدارة.

مثال 2-20:

ما هي قيم تيارات الدارة السابقة المبينة في الشكل 2-32 إذا كانت:

$$R_1 = 1\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 6\Omega, R_4 = R_5 = 2\Omega, R_6 = 1\Omega, E_3 = 9V, E_2 = 6V, E_1 = 9V$$

الحل:

من المعادلات (2-70) نجد:

$$I_5 = I_2 + I_4 = I_2 + I_1 + I_3 \text{ و } I_4 = I_1 + I_3 \text{ و } I_6 = I_1 + I_2$$

نضع هذه القيم في المعادلات (2-71):

$$(R_1 + R_4)I_1 - R_2 I_2 + R_4 I_3 = E_1 - E_2$$

$$(R_5 + R_6)I_1 + (R_2 + R_5 + R_6)I_2 + R_5 I_3 = E_2$$

$$(R_4 + R_5)I_1 + R_5 I_2 + (R_3 + R_4 + R_5)I_3 = E_3$$

إذاً لدينا:

$$3I_1 - 3I_2 + 2I_3 = 3$$

$$3I_1 + 6I_2 + 2I_3 = 6$$

$$4I_1 + 2I_2 + 10I_3 = 9$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} +3-3+2 \\ +6+6+2 \\ +9+2+10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} +3-3+2 \\ +3+6+2 \\ +4+2+10 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{3\cdot 6\cdot 10 - 3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 6\cdot 10 - 3\cdot 2\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 6\cdot 9}{3\cdot 6\cdot 10 - 3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 10 - 3\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 6\cdot 4} =$$

$$= \frac{180-12+180-54+24-108}{180-12+90-24+12-48} = \frac{210}{198} = 1.0606A$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} +3+3+2 \\ +3+6+2 \\ +4+9+10 \end{vmatrix}}{198} =$$

$$= \frac{3\cdot 6\cdot 10 - 3\cdot 2\cdot 9 - 3\cdot 3\cdot 10 + 3\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 9 - 2\cdot 6\cdot 4}{168} =$$

$$= \frac{180-54-90+24+54-48}{198} = \frac{66}{198} = 0.333A$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} +3-3+3 \\ +3+6+6 \\ +4+2+9 \end{vmatrix}}{198} =$$

$$= \frac{3\cdot 6\cdot 9 - 3\cdot 6\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 9 - 3\cdot 6\cdot 4 + 3\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 6\cdot 4}{168} =$$

$$= \frac{162-36+81-72+18-72}{198} = 0.4091$$

$$I_4 = I_1 + I_3 = 1.0606 + 0.4091 = 1.47A$$

$$I_5 = I_2 + I_4 = I_2 + I_1 + I_3 = 0.333 + 1.0606 + 0.4091 = 1.803A$$

$$I_6 = I_1 + I_2 = 1.06061 + 0.333 = 1.394A$$

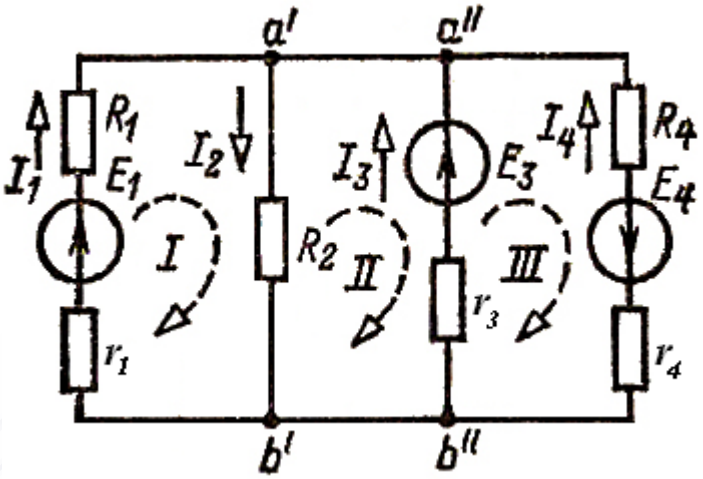
التأكد:

$$I_5 - I_6 - I_3 = 1.803 - 1.394 - 0.4091 = 0$$

مثال 2 -21:

حدد تيارات الدارة المبينة في الشكل 2-33 مع العلم أن:

$$R_4 = 25.8, R_2 = 20\Omega, R_1 = 4.5\Omega, r_4 = 0.2\Omega, r_3 = 1\Omega, r_1 = 0.5\Omega,$$
$$E_4 = 108V, E_3 = 111V, E_1 = 110V$$




**الشكل 2-33**

الحل:

1-بين النقطتين $a', a''$ لاتوجد أي مقاومة أو ق.م.ك.، ولهاتين النقطتين نفس الكمون، لذلك يمكن اعتبارهما نقطة واحدة. وبشكل مشابه فأن النقطتين $b', b''$ هما نقطة واحدة. لذلك فالدارة تتكون من عقدتين N=2 وصلت بينهما أربع فروع B=4 ، فيكون عدد التيارات المجهولة أربعة تيارات.

نختار الاتجاه الموجب للتيارات كما هو مبين في الشكل 2-33.

2- عدد المعادلات بحسب قانون كيرشوف الأول:

$$K_1 = N - 1 = 2 - 1 = 1$$

للنقطة a: $I_1 + I_3 + I_4 - I_2 = 0$

وبحسب قانون كيرشوف الثاني:

$$K_2 = B - N + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

للحلقة الأولى I: $(R_1 + r_1)I_1 + R_2 I_2 = E_1$

للحلقة الثانية II: $R_2 I_2 + r_3 I_3 = E_3 \Leftarrow -R_2 I_2 - r_3 I_3 = -E_3$

للحلقة الثالثة III: $r_3 I_3 - (R_4 + r_4)I_4 = E_3 + E_4$

نضع القيم العددية:

$$I_1 + I_3 + I_4 - I_2 = 0 \qquad (2\text{-}72)$$

$$5I_1 + 20I_2 = 110 \qquad (2\text{-}73)$$
$$20I_2 + 1\cdot I_3 = 111 \qquad (2\text{-}74)$$
$$1\cdot I_3 - 26I_4 = 219 \qquad (2\text{-}75)$$

من المعادلة (2-73) نجد:

$$I_2 = (110 - 5I_1)/20$$

ومن المعادلة (2-74) نجد:

$$I_3 = 111 - 20I_2 = 111 - 110 + 5I_1 = 1 + 5I_1$$

ومن المعادلة (275) نجد:

$$1\cdot I_3 - 26I_4 = 219$$
$$I_4 = (I_3 - 219)/26 = (1 + 5I_1 - 219)/26 \Rightarrow$$
$$I_4 = (5I_1 - 218)/26$$

نضع القيم الناتجة للتيارات في (2-72):

$$I_1 + 1 + 5I_1 + (5I_1 - 218)/26 - (110 - 5I_1)/20 = 0$$
$$(6 + \frac{5}{26} + \frac{5}{20})I_1 = -1 + \frac{218}{26} + \frac{110}{20}$$
$$6.4423I_1 = 12.8846 \Rightarrow I_1 = \frac{12.8846}{6.4423} = 2A$$
$$I_2 = (110 - 5\cdot 2)/20 = 5A$$
$$I_3 = 1 + 5I_1 = 11A$$
$$I_4 = (5I_1 - 218)/26 = -208/26 = -8A$$

### 2-6-5- طريقة تيارات الحلقات (حلقات مكسويل) Mesh analysis:

تستخدم طريقة تيارات الحلقات بشكل واسع لحساب الدارات الكهربائية المعقدة التي تحتوي على عدة حلقات وعدة منابع ق.م.ك.، لأنها تُقلل عدد المعادلات اللازمة للحسابات مقارنة مع طريقة استخدام قوانين كيرشوف بشكل مباشر وتبسط الحسابات.

تعتمد الطريقة على قانوني كيرشوف وعلى فرضيتين:

-يوجد في كل حلقة تيار حلقة وهمي يكون اتجاهه اختياري.

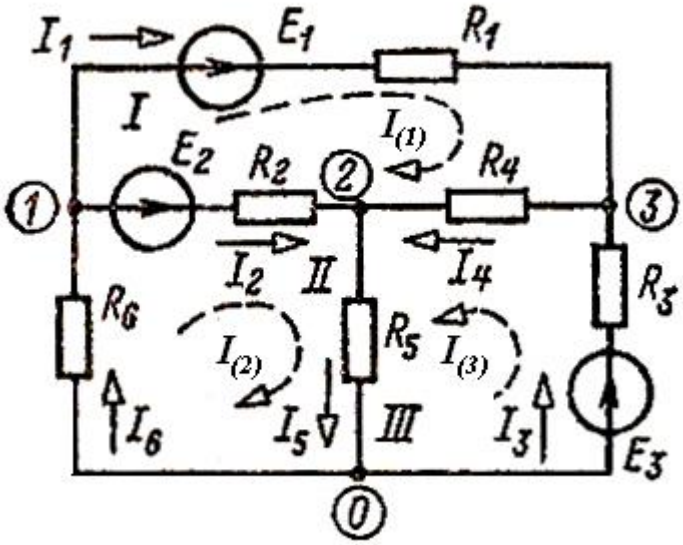
-تيار كل فرع يساوي للمجموع الجبري لتيارات الحلقات التي تلتف عبر هذا الفرع.

تتم في هذه الطريقة وضع معادلات لتيارات الحلقات فقط بحسب قانون كيرشوف الثاني، أي أن عددها هو $K_2 = B - N + 1$ معادلة.

نوضح هذه الطريقة على مثال الدارة المبينة في الشكل 2-34.

إن عدد المعادلات اللازمة لهذه الدارة هو: $K_2 = B - N + 1 = 3$

من أجل التوضيح نقوم باستخراج العلاقات انطلاقاً من قوانين كيرشوف. فبحسب قانون كيرشوف الثاني كنا قد وجدنا سابقاً لهذه الدارة المعادلات التالية:




الشكل 2-34

للحلقة الأولى I $\quad R_1 I_1 + R_4 I_4 - R_2 I_2 = E_1 - E_2$

للحلقة الثانية II $\quad R_2 I_2 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_2 \qquad (2\text{-}76)$

للحلقة الثالثة III $\quad R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_3$

ومن الدارة نجد أن:

$$I_3 = I_{(3)}, I_2 = I_{(2)} - I_{(1)}, I_1 = I_{(1)},$$
$$I_6 = I_{(2)}, I_5 = I_{(2)} + I_{(3)}, I_4 = I_{(1)} + I_{(3)} \qquad (2\text{-}76a)$$

نعوض في (2-76):

$$R_1 I_{(1)} + R_4 I_{(1)} + R_4 I_{(3)} - R_2 I_{(2)} + R_2 I_{(1)} = E_1 - E_2$$
$$R_2 I_{(2)} - R_2 I_{(1)} + R_5 I_{(2)} + R_5 I_{(3)} + R_6 I_{(2)} = E_2$$
$$R_3 I_{(3)} + R_4 I_{(1)} + R_4 I_{(3)} + R_5 I_{(2)} + R_5 I_{(3)} = E_3$$

ومنها:

$$(R_1 + R_4 + R_2) I_{(1)} - R_2 I_{(2)} + R_4 I_{(3)} = E_1 - E_2$$
$$-R_2 I_{(1)} + (R_2 + R_5 + R_6) I_{(2)} + R_5 I_{(3)} = E_2 \qquad (2\text{-}77)$$
$$R_4 I_{(1)} + R_5 I_{(2)} + (R_3 + R_4 + R_5) I_{(3)} = E_3$$

نرمز:

$$R_{13} = R_{31} = R_4, R_{12} = R_{21} = -R_2, R_{11} = R_1 + R_4 + R_2$$
$$R_{33} = R_3 + R_4 + R_5, R_{23} = R_{32} = R_5, R_{22} = R_2 + R_5 + R_6,$$
$$E_{(1)} = E_1 - E_2, E_{(2)} = E_2, E_{(3)} = E_3$$

نعوض في (2-77) فنحصل على معادلات طريقة حلقات التيار:

$$\begin{aligned} R_{11}I_{(1)} + R_{12}I_{(2)} + R_{13}I_{(3)} &= E_{(1)} \\ R_{21}I_{(1)} + R_{22}I_{(2)} + R_{23}I_{(3)} &= E_{(2)} \\ R_{31}I_{(1)} + R_{32}I_{(2)} + R_{33}I_{(3)} &= E_{(3)} \end{aligned} \qquad (2\text{-}78)$$

يتم حل المعادلات السابقة لإيجاد التيارات الحلقية ومنها تحدد قيم تيارات الفروع.

يمكن إيجاد حل مجموعة المعادلات (2-78) بالطرق الرياضية المعروفة ونقترح استخدام طريقة المعينات.

تسمى المقاومات $R_{33}, R_{22}, R_{11}$ بالمقاومة الذاتية للحلقة. إن المقاومة الذاتية للحلقة تساوي مجموع كل المقاومات التي تدخل ضمن الحلقة.

إن المقاومات $R_{32}, R_{23}, R_{31}, R_{13}, R_{21}, R_{12}$ هي مقاومات مشتركة بين حلقتين وتسمى المقاومة التبادلية. تؤخذ قيمة المقاومة التبادلية بإشارة موجبة (+) إذا كان للتيارين الحلقيين الملتفان عبرها نفس الاتجاه (مثل $R_{13} = R_{31} = R_4$) وتؤخذ بإشارة سالبة (−) إذا التف التياران الحلقيان عبرها باتجاهين متعاكسين (مثل $R_{12} = R_{21} = -R_2$).

إن المجموع الجبري للقوى المحركة الكهربائية التي تؤثر في حلقة معينة تسمى القوة المحركة الكهربائية الحلقية مثل: $E_{(3)}, E_{(2)}, E_{(1)}$.

تسلسل (خوارزمية) استخدام طريقة تيارات الحلقات:

1−نحدد عدد المعادلات اللازمة من العلاقة (2-69) ونكتبها على نمط المعادلات (2-78).

2−نختار الحلقات واتجاه التيارات الحلقية.

3- نحدد قيم المقاومات الذاتية والتبادلية وقيم القوى المحركة الكهربائية الحلقية.

4- نحدد قيم تيارات الحلقات بطريقة المعينات مثلاً.

5- نحدد القيم الحقيقية لتيارات الفروع (بشكل مشابه للعلاقات 2-76a).

مثال 2-22:

حدد تيارات الدارة المبينة في الشكل 2-34 بطريقة تيارات الحلقات، مع العلم أن المعطيات وردت في المثال 2-20:

$R_1 = 1\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 6\Omega, R_4 = R_5 = 2\Omega, R_6 = 1\Omega, E_3 = 9V, E_2 = 6V, E_1 = 9V$

الحل:

لقد حددنا سابقا بأن عدد المعادلات لهذه الدارة هو 3: $K_2 = B - N + 1 = 3$ وهي:

$$\begin{aligned} R_{11}I_{(1)} + R_{12}I_{(2)} + R_{13}I_{(3)} &= E_{(1)} \\ R_{21}I_{(1)} + R_{22}I_{(2)} + R_{23}I_{(3)} &= E_{(2)} \\ R_{31}I_{(1)} + R_{32}I_{(2)} + R_{33}I_{(3)} &= E_{(3)} \end{aligned} \qquad (2\text{-}79)$$

نحدد قيم المقاومات الذاتية والتبادلية وقيم ق.م.ك. الحلقية:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_4 + R_2 = 1 + 2 + 3 = 6\Omega \\ R_{22} &= R_2 + R_5 + R_6 = 3 + 2 + 1 = 6\Omega \\ R_{33} &= R_3 + R_4 + R_5 = 6 + 2 + 2 = 10\Omega \\ R_{12} &= R_{21} = -R_2 = -3\Omega \\ R_{13} &= R_{31} = R_4 = 2\Omega \\ R_{23} &= R_{32} = R_5 = 2\Omega \\ E_{(1)} &= E_1 - E_2 = 9 - 6 = 3V \\ E_{(2)} &= E_2 = 6V \\ E_{(3)} &= E_3 = 9V \end{aligned}$$

نعوض هذه القيم في (2-79):

$$\begin{aligned} 6I_{(1)} - 3I_{(2)} + 2I_{(3)} &= 3 \\ -3I_{(1)} + 6I_{(2)} + 2I_{(3)} &= 6 \\ 2I_{(1)} + 2I_{(2)} + 10I_{(3)} &= 9 \end{aligned}$$

ومنها نحدد قيم تيارات الحلقات:

$$I_{(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} +3 & -3 & +2 \\ +6 & +6 & +2 \\ +9 & +2 & +10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} +6 & -3 & +2 \\ -3 & +6 & +2 \\ +2 & +2 & +10 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{3\cdot 6\cdot 10 - 3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 6\cdot 10 - 3\cdot 9\cdot 2 + 2\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 6\cdot 9}{6\cdot 6\cdot 10 - 6\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-3)\cdot 10 - 3\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot(-3)\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 6} =$$

$$= \frac{180 - 12 + 180 - 54 + 24 - 108}{360 - 24 - 90 - 12 - 12 - 24} = \frac{210}{198} = 1.061A$$

$$I_{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} +6+3+2 \\ -3+6+2 \\ +2+9+10 \end{vmatrix}}{198} =$$

$$= \frac{6\cdot 6\cdot 10 - 6\cdot 2\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 10 + 3\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 9 - 2\cdot 6\cdot 2}{198} =$$

$$= \frac{360-108+90+12-54-24}{198} = \frac{276}{198} = 1.394A$$

$$I_{(3)} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} +6-3+3 \\ -3+6+6 \\ +2+2+9 \end{vmatrix}}{198} =$$

$$= \frac{6\cdot 6\cdot 9 - 6\cdot 6\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 9 - 3\cdot 2\cdot 6 - 3\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 6\cdot 2}{198} =$$

$$= \frac{324-72-81-36-18-36}{198} = \frac{81}{198} = 0.409A$$

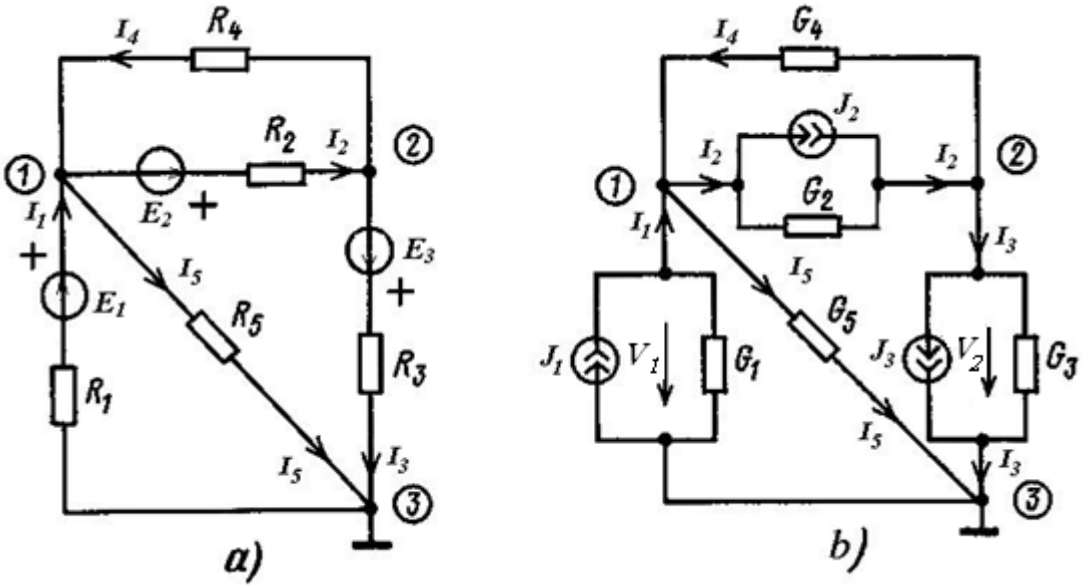
$$I_1 = I_{(1)} = 1.061A$$
$$I_2 = I_{(2)} - I_{(1)} = 1.394 - 1.0606 = 0.333A$$
$$I_3 = I_{(3)} = 0.409A$$
$$I_4 = I_{(1)} + I_{(3)} = 1.061 + 0.409 = 1.47A$$
$$I_5 = I_{(2)} + I_{(3)} = 1.394 + 0.409 = 1.803A$$
$$I_6 = I_{(2)} = 1.394A$$

وظيفة: مطلوب حل المثال 2-21 بطريقة تيارات الحلقات.

### 2-6-6- طريقة توترات العقد Nodal analysis:

تعتمد طريقة توترات العقد على قانون كيرشوف الأول وقانون أوم. وتتميز بأنها تسمح بتخفيض عدد المعادلات اللازمة لحل المسائل إلى القيمة N-1 (انظر العلاقة 2-68). يتم بحسب هذه الطريقة حساب كمونات العقد بالنسبة إلى كمون نقطة مرجعية (تعتبر مؤرضة ويؤخذ كمونها يساوي الصفر)، ومن خلال حساب فرق الكمون بين العقد تُحسب قيم التيارات في فروع الدارة.

لإثبات واستخراج علاقات هذه الطريقة نأخذ الدارة المبينة في الشكل 2-35، ونعتبر أن النقطة 3 هي نقطة مرجعية كمونها يساوي الصفر $V_3 = 0$.




**الشكل 2-35**

نحول منابع القوة المحركة الكهربائية إلى منابع تيار مكافئة بواسطة العلاقة (2-40) كما في الشكل b-35-2:

$$J_3 = G_3E_3; J_2 = G_2E_2; J_1 = G_1E_1$$
$$G_5 = 1/R_5; G_4 = 1/R_4; G_3 = 1/R_3; G_2 = 1/R_2; G_1 = 1/R_1$$

نكتب للعقدتين 1 و 2 معادلتين للتيارات بحسب قانون كيرشوف الأول:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_4 + I_2 + I_5 &= 0 \\ -I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}80)$$

نحسب قيم هذه التيارات بدلالة توترات العقد وبدلالة تيارات منابع التيار $J_3, J_2, J_1$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 - G_1V_1 \\ I_2 &= J_2 - G_2(V_2 - V_1) \\ I_3 &= J_3 + G_3V_2 \\ I_4 &= G_4(V_2 - V_1) \\ I_5 &= G_5V_1 \end{aligned} \qquad (2\text{-}81)$$

نضع هذه القيم في العلاقتين (2-80):

$$\begin{aligned} -J_1 + G_1V_1 - G_4V_2 + G_4V_1 + J_2 - G_2V_2 + G_2V_1 + G_5V_1 &= 0 \\ -J_2 + G_2V_2 - G_2V_1 + J_3 + G_3V_2 + G_4V_2 - G_4V_1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$(G_1+G_2+G_4+G_5)V_1-(G_2+G_4)V_2=J_1-J_2$$
$$-(G_2+G_4)V_1+(G_2+G_3+G_4)V_2=J_2-J_3 \qquad (2\text{-}82)$$

ومنها نحصل على مجموعة المعادلات المستخدمة من أجل تحليل دارة لها ثلاث عقد أحدها مؤرض:

$$G_{11}V_1+G_{12}V_2=J_{N1}$$
$$G_{21}V_1+G_{22}V_2=J_{N2} \qquad (2\text{-}83)$$

حيث: $G_{11}=G_1+G_2+G_4+G_5$ – الناقلية الذاتية للعقدة الأولى وتساوي المجموع الجبري لجميع الناقليات المتصلة مع هذه العقدة.

$G_{22}=G_2+G_3+G_4$ –الناقلية الذاتية للعقدة الثانية وتساوي المجموع الجبري لناقليات كافة الفروع المتصلة معها.

$G_{12}=G_{21}=-(G_2+G_4)$ – الناقلية التبادلية بين العقدتين الأولى والثانية وتساوي لناقلية الفروع الواصلة بينهما بشكل مباشر.

تكون الناقليات الذاتية دائماً موجبة وتكون الناقليات التبادلية دائماً سالبة.

$J_{N2}=J_2-J_3=G_2E_2-G_3E_3, J_{N1}=J_1-J_2=G_1E_1-G_2E_2$ –تيارات المنابع المغذية للعقد وهي مجموع جداءات الناقليات بالقوى المحركة الكهربائية للمنابع وتؤخذ الجداءات بإشارة موجبة إذا كان اتجاه ق.م.ك. نحو العقدة وبإشارة سالبة إذا كان اتجاه ق.م.ك. خارج من العقدة. وإذا وجد منبع تيار داخل إلى العقدة يضاف بإشارة موجبة وإذا كان خارج من العقدة يؤخذ بإشارة سالبة.

بشكل مشابه لمجموعة المعادلات (2-83) يمكن كتابة مجموعة معادلات لأي عدد من العقد.

مثال 2-23:

للدارة المبينة في الشكل 2-35-a لدينا:

$$R_5=5\Omega, R_4=15\Omega, R_3=10\Omega, R_2=30\Omega, R_1=10\Omega, E_3=25V, E_2=20V, E_1=30V$$

والمطلوب تحديد كمون العقد وتيارات الفروع.

الحل:

نؤرض العقدة 3 فيبقى لدينا عقدتين، وتأخذ مجموعة معادلات الدارة الشكل المبين في العلاقة (2-83) :

$$G_{11}V_1+G_{12}V_2=J_{N1}$$
$$G_{21}V_1+G_{22}V_2=J_{N2}$$

نحدد قيم الناقليات وتيارات المنابع:

$$G_{11}=G_1+G_2+G_4+G_5=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{3+1+2+6}{30}=\frac{12}{30}=\frac{4}{10}[S]$$

$$G_{22}=G_2+G_3+G_4=\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1+3+2}{30}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}[S]$$

$$G_{12}=G_{21}=-(G_2+G_4)=-(\frac{1}{30}+\frac{1}{15})=-\frac{3}{30}=-\frac{1}{10}$$

$$J_{N1}=J_1-J_2=G_1E1-G_2E_2=\frac{30}{10}-\frac{20}{30}=\frac{70}{30}=\frac{7}{3}A$$

$$J_{N2}=J_2-J_3=G_2E_2-G_3E_3=\frac{20}{30}-\frac{25}{10}=-\frac{55}{30}$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{10}V_1-\frac{1}{10}V_2&=\frac{7}{3}\\ -\frac{1}{10}V_1+\frac{1}{5}V_2&=-\frac{55}{30}\end{aligned}\quad\Rightarrow$$

$$V_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}+\frac{7}{3} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{55}{30} & +\frac{1}{5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}+\frac{4}{10} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{10} & +\frac{1}{5}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{7}{15}-\frac{55}{300}}{\frac{4}{50}-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{7}{15}-\frac{11}{60}}{\frac{7}{100}}=\frac{\frac{17}{60}}{\frac{7}{100}}=\frac{1700}{420}=4.048V$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix}+\frac{4}{10} & +\frac{7}{3}\\ -\frac{1}{10} & -\frac{55}{30}\end{vmatrix}}{\frac{7}{100}}=\frac{-\frac{220}{300}+\frac{7}{30}}{\frac{7}{100}}=\frac{-\frac{150}{300}}{\frac{7}{100}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{7}{100}}=-\frac{100}{14}=-7.143V$$

$$I_1=\frac{V_3-V_1+E_1}{R_1}=\frac{0-4.048+30}{10}=2.595A$$

$$I_2=\frac{V_1-V_2+E_2}{R_2}=\frac{4.048+7.143+20}{30}=1.04A$$

$$I_3=\frac{V_2-V_3+E_3}{R_3}=\frac{-7.143-0+25}{10}=1.786A$$

$$I_4 = \frac{V_2 - V_1}{R_4} = \frac{-7.143 - 4.048}{15} = -0.746A$$

$$I_5 = \frac{V_1 - V_3}{R_5} = \frac{4.048 - 0}{5} = 0.81A$$

مثال 2-24:

مطلوب حل المثال 2-21 بطريقة توترات العقد (انظر الشكل 2-33).

الحل:

نقوم بتأريض النقطة b أي نعتب كمونها يساوي الصفر. فيصبح عدد المعادلات اللازمة لتحليل هذه الدارة هي:

.N-1=2-1=1

نكتب هذه المعادلة:

$$G_{11}V_1 = J_{N1}$$

نحدد قيم $J_{N1}, G_{11}$ :

$$G_{11} = \frac{1}{R_1 + r_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{R_4 + r_4} = \frac{1}{4.5 + 0.5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{1} + \frac{1}{25.8 + 0.2} =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{1} + \frac{1}{26} = \frac{52 + 13 + 260 + 10}{260} = \frac{335}{260}[S]$$

$$J_{N1} = G_1E_1 + G_3E_3 - G_4E_4 = \frac{110}{5} + \frac{111}{1} - \frac{108}{26} =$$

$$= \frac{2860 + 14430 - 540}{130} = \frac{1675}{13}[A]$$

إذاً:

$$V_a = V_1 = \frac{J_{N1}}{G_{11}} = \frac{1675/13}{335/260} = 100V$$

$$I_1 = \frac{V_b - V_a + E_1}{R_1 + r} = \frac{0-100+110}{5} = 2A$$

$$I_2 = \frac{V_a - V_b}{R_2} = \frac{100}{20} = 5A$$

$$I_3 = \frac{V_b - V_a + E_3}{r_3} = \frac{0-100+111}{1} = 11A$$

$$I_4 = \frac{V_b - V_a - E_4}{R_4 + r_4} = \frac{0-100-108}{26} = -8A$$

### 2-6-7-مبدأ التراكم Superposition Principle:

ينص مبدأ التراكم على ما يلي:

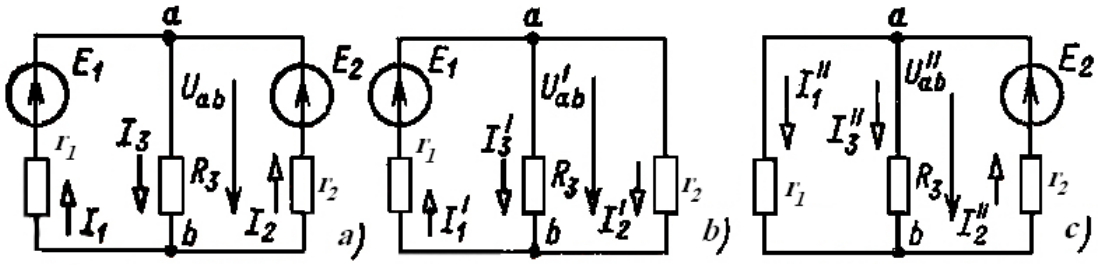
*إن قيمة التيار في فرع ما من فروع دارة كهربائية تحتوي على عدة منابع تغذية تساوي للمجموع الجبري للتيارات الناتجة عن كل منبع تغذية بشكل منفصل.*

عند حساب التيار الناتج عن أحد المنابع في فرع ما يجب حذف باقي المنابع والاستعاضة عنها بمقاوماتها الداخلية. فإذا كانت المنابع مثالية نقوم بقصر منابع التوتر (المقاومة الداخلية تساوي الصفر) وفصل منابع التيار (المقاومة الداخلية تساوي لانهاية).

مثال 2-25:

احسب تيارات الدارة المبينة في الشكل 2-36، مع العلم أن:

$R_3 = 12\Omega, r_1 = 3\Omega, r_2 = 4\Omega, E_2 = 48V, E_1 = 72V$.




**الشكل 2-36**

الحل:

نحدد التيارات الناتجة عن المنبع $E_1$ (انظر الشكل 2-36-b):

$$I_1^{'} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{R_3 \cdot r_2}{R_3 + r_2}} = \frac{72}{3 + \frac{12 \cdot 4}{12 + 4}} = \frac{72}{6} = 12A$$

$$U_{ab}^{'} = I_1^{'} \frac{r_2 \cdot R_3}{r_2 + R_3} = 12 \cdot 3 = 36V$$

$$I_2^{'} = \frac{U_{ab}^{'}}{r_2} = \frac{36}{4} = 9A$$

$$I_3^{'} = \frac{U_{ab}^{'}}{R_3} = \frac{36}{12} = 3A$$

نحدد التيارات الناتجة عن المنبع $E_2$

$$I_2^{''} = \frac{E}{r_2 + \frac{r_1 \cdot R_3}{r_1 + R_3}} = \frac{48}{4 + \frac{3 \cdot 12}{15}} = \frac{48}{6.4} = 7.5A$$

$$I_1^{''} = I_2^{''} \frac{R_3}{R_3 + r_1} = 7.5 \frac{12}{12 + 3} = 6A$$

$$I_3^{''} = I_2^{''} \frac{r_1}{r_1 + R_3} = 7.5 \frac{3}{3 + 12} = 1.5A$$

نحدد القيم النهائية للتيارات:

$$I_1 = I_1^{'} - I_1^{''} = 12 - 6 = 6A$$

$$I_2 = I_2^{''} - I_2^{'} = 7.5 - 9 = -1.5A$$

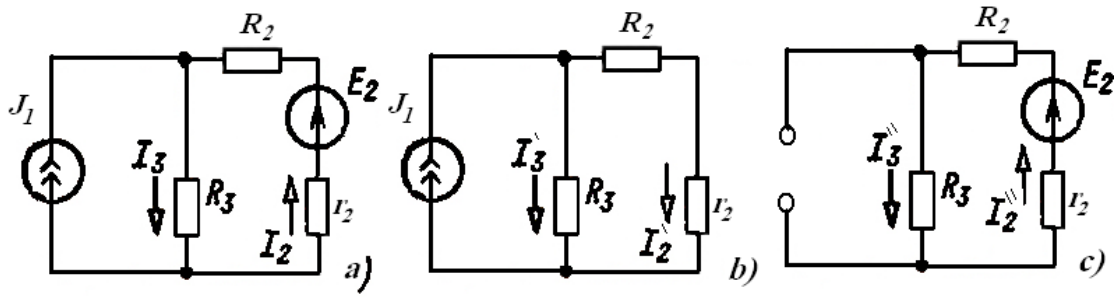
$$I_3 = I_3^{'} + I_3^{''} = 3 + 1.5 = 4.5A$$

مسألة غير محلولة:

اعد حل المثال 2-25 بطريقة توترات العقد.

مثال 2-26:

احسب قيمة التيار $I_3$ للدارة المبينة في الشكل 2-37-a.




**الشكل 2-37**

الحل:

نحدد قيمة $I_3^{'}$ الناتجة عن منبع التيار:

$$I_3^{'} = J_1 \frac{R_2 + r_2}{R_3 + R_2 + r_2}$$

نحدد قيمة $I_3^{''}$ الناتجة عن منبع ق.م.ك.:

$$I_3^{''} = \frac{E_2}{r_2 + R_2 + R_3}$$

فتكون قيمة التيار الكلي تساوي:

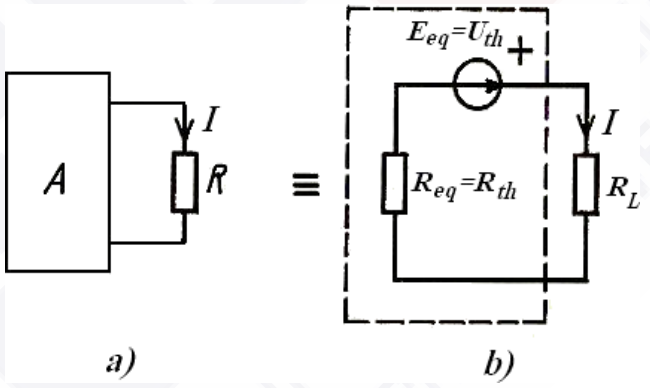
$$I_3 = I_3^{'} + I_3^{''}$$

### 2-6-8- طريقة مولد التوتر المكافئ (نظرية ثيفينين **Thevenin Theorem**):

تُستخدم طريقة المولد المكافئ لإيجاد التيار في فرع واحد أو لإيجاد فرق التوتر على طرفيه.

عندئذ يُنظر لباقي أجزاء الداره وكأنه ثنائي أقطاب (انظر الشكل 2-38-a).

نقول بأن ثنائي الأقطاب فعال (A) إذا احتوى على منبع تغذية وفي حال عدم وجود منبع يكون ثنائي الأقطاب غير فعال.




**الشكل 2-38**

تنص نظرية ثيفينين على ما يلي:

*إن التيار في أي فرع من فروع الدارة الكهربائية الخطية يبقى نفسه فيما لو استبدلنا دارة ثنائي الأقطاب الفعال، الذي على طرفيه موصل هذا الفرع، بدارة تسلسلية مكافئة مؤلفة من منبع توتر مكافئ ومقاومة مكافئة.*

إن قيمة توتر المنبع المكافئ تساوي لتوتر اللاحمل $U_{th}$ على طرفي الفرع المفصول المطلوب حساب تياره. والمقاومة المكافئة $R_{th} = R_{eq}$ تساوي مقاومة دارة ثنائي الأقطاب (غير الفعالة) منظوراً إليها من

جهة الفرع المفصول. وتكون قيمة التيار في الفرع المطلوب (انظر الدارة المبينة في الشكل 2-38-b) تساوي:

$$I_L = \frac{U_{th}}{R_{eq} + R_L} \qquad (2\text{-}84)$$

يتم حساب التيار في فرع ما بطريقة ثيفينين بإتباع التسلسل التالي:

أ- نفصل الفرع (المقاومة) المراد حساب تياره ونحدد قيمة فرق التوتر بين الطرفين المفصولين لهذا الفرع $U_{th}$.

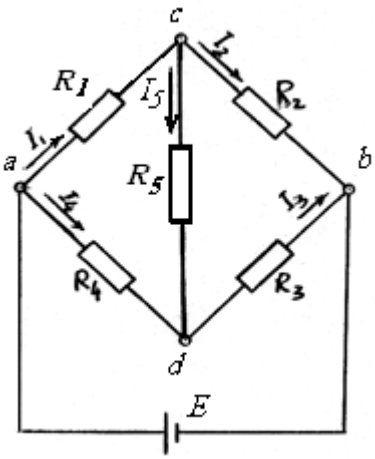
ب-نحذف المنابع ونستبدلها بمقاوماتها الداخلية (إن وجدت) ونحدد المقاومة المكافئة للدارة $R_{th} = R_{eq}$ منظوراً إليها من جهة طرفي المقاومة المفصولة.

ج-نحسب قيمة التيار المطلوب بحسب العلاقة (2-84).

مثال 2-27:

للدارة المبينة في الشكل 2-39 لدينا:

$E = 10V, R_5 = 50\Omega, R_4 = 30\Omega, R_3 = 10\Omega, R_2 = 40\Omega, R_1 = 20\Omega$ ، والمطلوب حساب قيمة التيار المار في المقاومة $R_5$ بطريقة ثيفينين.




**الشكل 2-39**

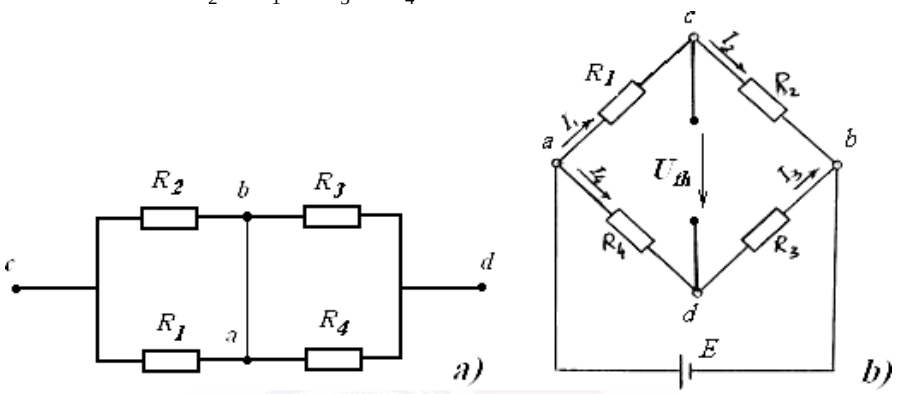
حسب علاقة ثيفينين (2-84) لدينا:

$$I_5 = \frac{U_{th}}{R_{eq} + R_5}$$

نحسب قيمة $R_{th} = R_{eq}$ . فبعد قصر منبع التوتر E وفصل المقاومة $R_5$ تأخذ الدارة الشكل 2-40-a:

فتكون قيمة $R_{eq}$ تساوي:

$$R_{eq} = \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{40 \cdot 20}{60} + \frac{10 \cdot 30}{40} = 20.833\Omega$$




**الشكل 2-40**

نحسب قيمة $U_{th}$ وذلك بعد حساب التيارات. فعند فصل $R_5$ يكون:

$$I_1 = I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{20+40} = \frac{1}{6} A$$

$$I_3 = I_4 = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{10}{10+30} = \frac{1}{4} A$$

$$I_1 R_1 + U_{th} - I_4 R_4 = 0$$

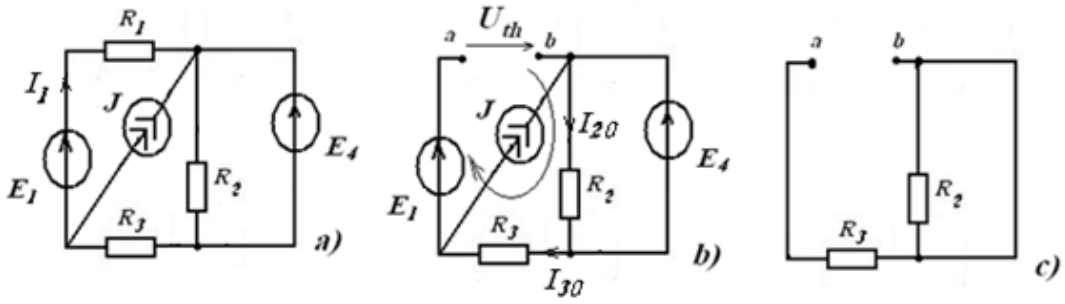
$$\Rightarrow U_{th} = -I_1 R_1 + I_4 R_4 = -\frac{20}{6} + \frac{30}{4} = \frac{-40+90}{12} = 4.167\Omega$$

من الدارة المكافئة المبينة في الشكل 2-38-b نجد قيمة التيار المطلوب:

$$I_5 = \frac{U_{th}}{R_{eq} + R_5} = \frac{4.167}{20.833 + 50} = 0.059A$$

مثال 2-28:

مطلوب حساب التيار المار في المقاومة $R_1$ للدارة المبينة في الشكل 2-41 بطريقة مولد التوتر المكافئ، مع العلم أن: $R_3 = R_2 = R_1 = 10\Omega, E_4 = E_1 = 60V, J = 2A$ .




**الشكل 2-41**

الحل:

حسب علاقة ثيفينين (2-84) لدينا:

$$I_1 = \frac{U_{th}}{R_{eq} + R1}$$

من الدارة 2-42-b نجد أن:

$$U_{th} + I_{20}R_2 + I_{30}R_3 = E_1$$

نحدد قيمة التيارات بحسب مبدأ التراكم.

التيارات الناتجة عن J تساوي:

$$I'_{30} = J = 2A, I'_{20} = 0$$

التيارات الناتجة عن $E_4$ تساوي:

$$I''_{30} = 0, I''_{20} = \frac{E_4}{R_2} = \frac{60}{10} = 6A$$

إذاً:

$$I_{30} = I'_{30} + I''_{30} = 2A, I_{20} = I'_{20} + I''_{20} = 6A$$

نعوض:

$$U_{th} = E_1 - I_{20}R_2 - I_{30}R_3 = 60 - 60 - 20 = -20V$$

نحدد قيمة المقاومة المكافئة للدارة عند النظر من جهة أطراف المقاومة المفصولة (انظر الشكل 2-41-c):

$$R_{eq} = R_3 = 10\Omega$$

إذاً قيمة التيار $I_1$ تساوي:

$$I_1 = \frac{U_{th}}{R_{eq} + R1} = \frac{-20}{20} = -1A$$

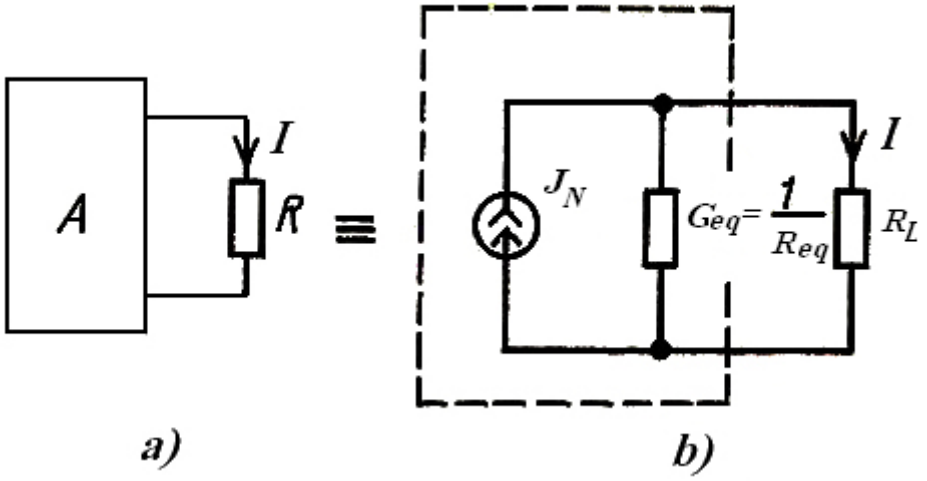
أي أن قيمة التيار المطلوب تساوي 1A واتجاهه بعكس الاتجاه المحدد على الدارة.

### 2-6-9-طريقة مولد التيار المكافئ (نظرية نورتن Norton's thorem):

تعتمد هذه الطريقة على نظرية نورتن التي تنص على الأتي:

*إن التيار في أي فرع من فروع الدارة الكهربائية الخطية يبقى نفسه فيما لو استبدلنا دارة ثنائي الأقطاب الفعال، الذي على طرفيه موصل هذا الفرع، بدارة منبع تيار مكافئ. قيمة منبع التيار تساوي إلى تيار قصر هذا الفرع، وناقليته الداخلية تساوي لناقلية الدخل المكافئة للدارة عند النظر إليها من جهة*

*طرفي الفرع المراد حساب تياره بعد فصله وبعد حذف منابع ق.م.ك. وفتح منابع التيار* (انظر الشكل 2-42).




**الشكل 2-42**

يتم إثبات هذه الطريقة عادة بأنه تم استبدال منبع التوتر المكافئ (انظر الشكل 2-38-b) بمنبع تيار مكافئ (الشكل 2-42-b):

$$G_N = G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_N}$$
$$J_N = \frac{E_{eq}}{R_{eq}} = G_{eq} E_{eq} \qquad (2\text{-}85)$$

من (2-85) نجد العلاقة التي تحدد مقاومة ثنائي الأقطاب غير الفعال:

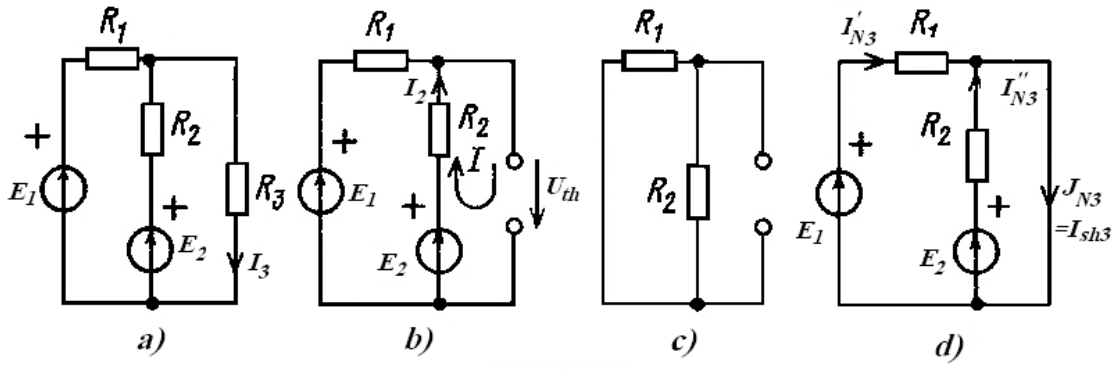
$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{E_{eq}}{J_N} \qquad (2\text{-}86)$$

بعد تحديد قيمة تيار القصر $J_N$ والمقاومة المكافئة $R_N$ يتم إيجاد القيمة المطلوبة للتيار من قانون تفرع التيار:

$$I_L = J_N \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_L} \qquad (2\text{-}87)$$

مثال 2-29:

للدارة المبينة في الشكل 2-43-a حدد بطريقة ثيفينن وبطريقة نورتن التيار المار في المقاومة $R_3$، مع العلم بأن: $R_3 = 12\Omega, R_1 = 3\Omega, R_2 = 4\Omega, E_2 = 48V, E_1 = 72V$.




الشكل 2-43

الحل:

أ- بطريقة ثيفينين:

نفصل فرع المقاومة $R_3$ (الشكل 2-43-b) ونحدد قيمة $U_{th}$ بحسب قانون كيرشوف الثاني:

$$U_{th}+R_2I_2 = E_2 \Rightarrow U_{th} = E_2 - R_2I_2$$

$$I_2 = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} = \frac{72-48}{4+3} = 3.43A$$

$$U_{th} = 72 - 3\cdot 3.43 = 61.71V$$

نحدد قيمة المقاومة المكافئة لثنائي الأقطاب غير الفعال من الدارة المبينة في الشكل 2-43-c:

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{4\cdot 3}{7} = \frac{12}{7}\Omega$$

إذاً:

$$I_3 = \frac{U_{th}}{R_{eq}+R_3} = \frac{61.71}{12/7+12} = 4.5A$$

ب- بطريقة نورتن:

نقصر فرع $R_3$ (انظر الشكل 2-43-d) ونحدد قيمة $I_{N3}$ بطريقة التراكم:

$$J_{N3} = I'_{N3} + I''_{N3} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = \frac{72}{3} + \frac{48}{4} = 36A$$

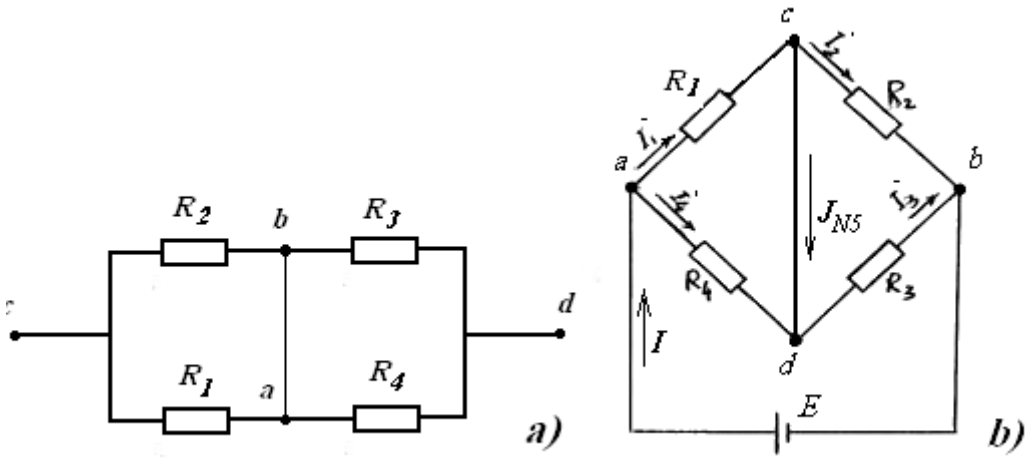
$$I_3 = J_{N3}\frac{R_{eq}}{R_{eq}+R_3} = 36\frac{12/7}{12/7+12} = 4.5A$$

مثال 2-30:

مطلوب حل المثال 2-27 بطريقة نورتن.

الحل:

$$E = 10V, R_5 = 50\Omega, R_4 = 30\Omega, R_3 = 10\Omega, R_2 = 40\Omega, R_1 = 20\Omega$$




الشكل 2-44

لقد حددنا سابقاً:

$$R_{eq} = \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{40 \cdot 20}{60} + \frac{10 \cdot 30}{40} = 20.833\Omega$$

نحدد قيمة تيار القصر $J_{N5}$ (الشكل 2-44) لهذا نحسب قيمة $I$ ومنه نحسب قيمة $I_4^{'}, I_1^{'}$ بحسب قانون تفرع التيار ومن ثم نحسب $J_{N5}$ من قانون كيرشوف الأول:

$$I = \frac{E}{R_1 \cdot R_4 / R_1 + R_4 + R_2 \cdot R_3 / R_2 + R_3} =$$

$$= \frac{10}{12+8} = 0.5A$$

$$I_1^{'} = I \frac{R_4}{R_1 + R_4} = 0.5 \frac{30}{50} = 0.3A$$

$$I_2^{'} = I \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0.5 \frac{10}{50} = 0.1A$$

$$J_{N5} = I_1^{'} - I_2^{'} = 0.3 - 0.1 = 0.2A$$

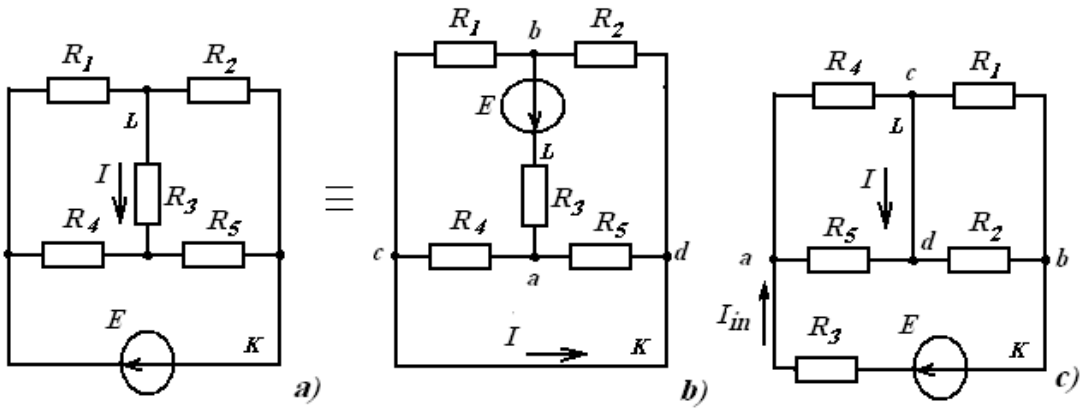
وحسب العلاقة (2-78) نحدد قيمة التيار المطلوب:

$$I_5 = J_{N5} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_5} = 0.2 \frac{20.833}{20.833 + 50} = 0.059A$$

### 2-6-10- مبدأ التبادلية:

بفرض لدينا دارة لا تحتوي سوى على قوة محركة كهربائية واحدة موجودة في الفرع الأول مثلاً فأنها ستنتج قيم للتيار في الفروع الأخرى. فتنص النظرية التبادلية على ما يلي:

*إذا تسببت القوة المحركة الكهربائية (E) الموصلة في الفرع K بمرور تيار قدره I في الفرع L فأن نقل هذه ق.م.ك إلى الفرع L ستنتج نفس قيمة التيار I في الفرع K* (انظر الشكل 2-45).




**الشكل 2-45**

مثال 1-31:

اوجد التيار I المار في المقاومة R3 للدارة المبينة في الشكل 2-45-a مع العلم أن:

$$E = 10V, R_5 = 10\Omega, R_4 = 30\Omega, R_3 = 50\Omega, R_2 = 40\Omega, R_1 = 20\Omega$$

الحل:

-ننقل القوة المحركة الكهربائية E من K إلى L (الشكل 2-45-b) فتكون قيمة التيار في K هي نفسها القيمة المطلوبة، لذلك نحول الدارة إلى الشكل المبين في 2-45-c ومنها نجد:

$$I_{in} = \frac{E}{R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{10}{50 + 7.5 + 13.333} = 0.141A$$

$$I_4 = I_{in}\frac{R_5}{R_5 + R_4} = 0.141\frac{10}{40} = 0.0353A$$

$$I_1 = I_{in}\frac{R_2}{R_2 + R_1} = 0.141\frac{40}{60} = 0.094A$$

$$I = I_4 - I_1 = 0.0353 - 0.094 = -0.059A$$

مسائل غير محلولة: